

Hinweise zu den Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

Kap. 1

zu A 1.1:

$n = 13$:

Da n eine Primzahl ist, lassen sich alle Sternfiguren $\{13/k\}$ mit $k = 2, 3, 4, 5, 6$ als durchgehende Streckenzüge zeichnen:

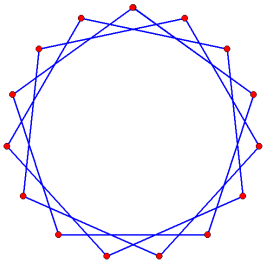
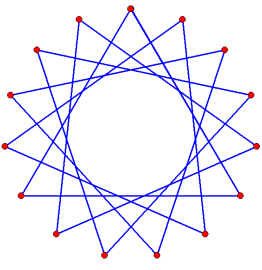
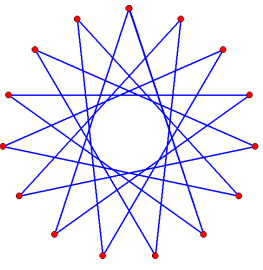
$\{13/2\}$ $0-2-4-6-8-10-12-1$ $-3-5-7-9-11-0$	$\{13/3\}$ $0-3-6-9-12-2-5-8$ $-11-1-4-7-10-0$	$\{13/4\}$ $0-4-8-12-3-7-11-2$ $-6-10-1-5-9-0$
$\{13/5\}$ $0-5-10-2-7-12-4-9$ $-1-6-11-3-8-0$	$\{13/6\}$ $0-6-12-5-11-4-10-3$ $-9-2-8-1-7-0$	

$n = 15$:

Da $n = 3 \cdot 5$, lassen sich die Sternfiguren $\{15/k\}$ mit $k = 2, 4, 7$ (teilerfremd) als durchgehende Streckenzüge zeichnen:

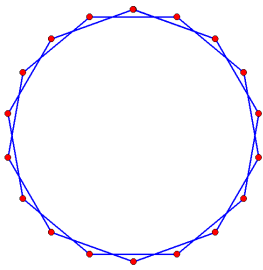
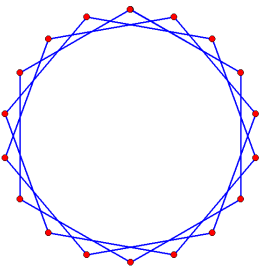
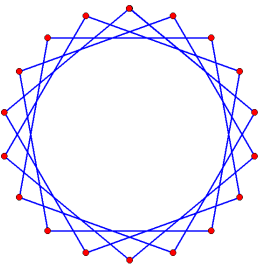
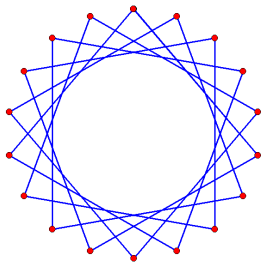
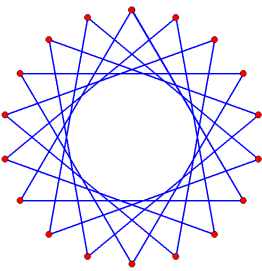
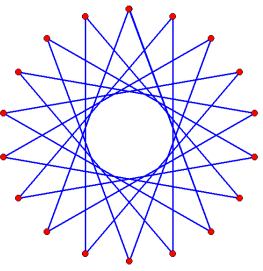
$\{15/2\}$ $0-2-4-6-8-10-12-14$ $-1-3-5-7-9-11-13-0$	$\{15/4\}$ $0-4-8-12-1-5-9-13$ $-2-6-10-14-3-7-11-0$	$\{15/7\}$ $0-7-14-6-13-5-12-4$ $-11-3-10-2-9-1-8-0$
--	--	--

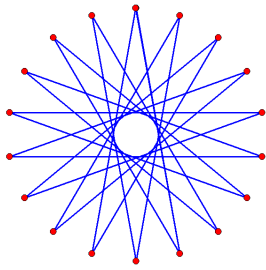
Die Sternfigur $\{15/3\}$ besteht aus 3 regelmäßigen 5-Ecken, da 3 ein Teiler von 15 ist, Sternfigur $\{15/5\}$ aus 5 regelmäßigen 3-Ecken, da 5 ein Teiler von 15 ist, und Sternfigur $\{15/6\}$ besteht wegen $\text{ggT}(15; 6) = 3$ aus drei 5-zackigen Sternen vom Typ $\{5/2\}$:

 $\{15/3\}$ 0 – 3 – 6 – 9 – 12 – 0, 1 – 4 – 7 – 10 – 13 – 1, 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 2	 $\{15/5\}$ 0 – 5 – 10 – 0, 1 – 6 – 11 – 1, 2 – 7 – 12 – 2, 3 – 8 – 13 – 3, 4 – 9 – 14 – 4	 $\{15/6\}$ 0 – 6 – 12 – 3 – 9 – 0, 1 – 7 – 13 – 4 – 10 – 1, 2 – 8 – 14 – 5 – 11 – 2
--	--	--

$n = 18$:

Da $n = 2 \cdot 3 \cdot 3$, lassen sich nur die Sternfiguren $\{18/k\}$ mit $k = 5, 7$ (teilerfremd) als durchgehende Streckenzüge zeichnen. Sternfigur $\{18/2\}$ besteht aus 2 regelmäßigen 9-Ecken, da 2 ein Teiler von 18 ist. Sternfigur $\{18/3\}$ besteht aus 3 regelmäßigen 6-Ecken, da 3 ein Teiler von 18 ist. Sternfigur $\{18/4\}$ besteht wegen $\text{ggT}(18;4) = 2$ aus zwei 9-zackigen Sternen vom Typ $\{9/2\}$. Sternfigur $\{18/6\}$ besteht aus 6 regelmäßigen 3-Ecken, da 6 ein Teiler von 18 ist. Sternfigur $\{18/8\}$ besteht wegen $\text{ggT}(18;8) = 2$ aus zwei 9-zackigen Sternen vom Typ $\{9/4\}$.

 $\{18/2\}$ 0 – 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16 – 0, 1 – 3 – 5 – 7 – 9 – 11 – 13 – 15 – 17 – 1	 $\{18/3\}$ 0 – 3 – 6 – 9 – 12 – 15 – 0, 1 – 4 – 7 – 10 – 13 – 16 – 1, 2 – 5 – 8 – 11 – 14 – 17 – 2	 $\{18/4\}$ 0 – 4 – 8 – 12 – 16 – 2 – 6 – 10 – 14 – 0, 1 – 5 – 9 – 13 – 17 – 3 – 7 – 11 – 15 – 1
 $\{18/5\}$ 0 – 5 – 10 – 15 – 2 – 7 – 12 – 17 – 4 – 9 – 14 – 1 – 6 – 11 – 16 – 3 – 8 – 13 – 0	 $\{18/6\}$ 0 – 6 – 12 – 18, 1 – 7 – 13 – 1, 2 – 8 – 14 – 2, 3 – 9 – 15 – 3, 4 – 10 – 16 – 4, 5 – 11 – 17 – 5	 $\{18/7\}$ 0 – 7 – 14 – 3 – 10 – 17 – 6 – 13 – 2 – 9 – 16 – 5 – 12 – 1 – 8 – 15 – 4 – 11 – 0

 {18/8} 0 – 8 – 16 – 6 – 14 – 4 – 12 – 2 – 10 – 0, 1 – 9 – 17 – 7 – 15 – 5 – 13 – 3 – 11 – 1		
---	--	--

zu A 1.2:

Stern {5/2} kann mit 2 Farben gefärbt werden: Innen liegt das regelmäßige 5-Eck = Stern {5/1}, außen liegen die 5 gleichgroßen Zacken.	Stern {7/2} kann mit 2 Farben gefärbt werden: Innen liegt das regelmäßige 7-Eck = Stern {7/1}, außen liegen die 7 gleichgroßen Zacken.	Stern {7/3} kann mit 3 Farben gefärbt werden: Innen liegt der Stern {7/2}, der mit zwei Farben gefärbt werden kann; außen liegen die 7 gleichgroßen Zacken.
Stern {9/2} kann mit 2 Farben gefärbt werden: Innen liegt das regelmäßige 9-Eck = Stern {9/1}, außen liegen die 9 gleichgroßen Zacken.	Stern {9/3} kann mit 3 Farben gefärbt werden: Innen liegt der Stern {9/2}, der mit zwei Farben gefärbt werden kann; außen liegen die 9 gleichgroßen Zacken.	Stern {9/4} kann mit 4 Farben gefärbt werden: Innen liegt der Stern {9/3}, der mit drei Farben gefärbt werden kann, außen liegen die 9 gleichgroßen Zacken.

Fazit: Da Stern $\{n/k\}$ aus Stern $\{n/k - 1\}$ und n Zacken außen besteht, kann schrittweise erschlossen werden, dass der Stern mit k Farben gefärbt werden kann.

zu A 1.3:

Ein regelmäßiges 9-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 6 = 27$ Diagonalen, von denen 9 Diagonalen die drei gleichseitigen Dreiecke des Sterns {9/3} bilden und jeweils 9 Diagonalen zu den regelmäßigen 9-zackigen Sternen {9/2} und {9/4} gehören.

Ein regelmäßiges 10-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 7 = 35$ Diagonalen, von denen 5 Diagonalen jeweils nur zwei gegenüberliegende Punkte verbinden, 10 Diagonalen bilden die beiden regelmäßigen 5-Ecke des Sterns {10/2}, 10 Diagonalen bilden die beiden 5-zackigen Sterne, aus denen Stern {10/4} besteht und 10 Diagonalen gehören zum regelmäßigen 10-zackigen Stern {10/3}.

Ein regelmäßiges 11-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 8 = 44$ Diagonalen, von denen jeweils 11 Diagonalen die regelmäßigen Sterne {11/2}, {11/3}, {11/4} und {11/5} bilden.

Ein regelmäßiges 12-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54$ Diagonalen, von denen 6 Diagonalen jeweils nur zwei gegenüberliegende Punkte verbinden, 12 Diagonalen bilden die beiden regelmäßigen 6-Ecke des Sterns {12/2}, 12 Diagonalen bilden die drei Quadrate des Sterns {12/3}, 12 Diagonalen bilden die beiden regelmäßigen 6-Ecke, aus denen Stern {12/4} besteht und 12 Diagonalen gehören zum regelmäßigen 12-zackigen Stern {12/5}.

Verallgemeinerung:

Die Anzahl der Diagonalen in einem regelmäßigen n -Eck beträgt $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3)$.

Bei ungeradem n ist der Faktor $n - 3$ eine gerade Zahl und lässt sich durch 2 teilen. $\frac{1}{2} \cdot (n - 3)$ gibt also an, wie viele Sterne gebildet werden können: Bei $n = 5$ ist dies $\frac{1}{2} \cdot (n - 3) = 1$ Stern, bei $n = 7$ sind dies $\frac{1}{2} \cdot (n - 3) = 2$ Sterne, bei $n = 9$ sind dies $\frac{1}{2} \cdot (n - 3) = 3$ Sterne usw.

Bei geradem n sind $\frac{1}{2} \cdot n$ Diagonalen zum Zeichnen von Sternen unbrauchbar, weil sie nur jeweils zwei gegenüberliegende Punkte miteinander verbinden. Übrig bleiben $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3) - \frac{1}{2} \cdot n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 4)$ Diagonalen. $\frac{1}{2} \cdot (n - 4)$ gibt an, wie viele Sterne gebildet werden können: Bei $n = 6$ ist dies $\frac{1}{2} \cdot (n - 4) = 1$ Stern, bei $n = 8$ sind dies $\frac{1}{2} \cdot (n - 4) = 2$ Sterne, bei $n = 10$ sind dies $\frac{1}{2} \cdot (n - 4) = 3$ Sterne usw.

Welche Stern-Typen entstehen, hängt – wie ausgeführt – von k ab: ein Stern aus k Vielecken mit n/k Ecken oder ein Stern aus g Sternen mit n/g Zacken oder ein Stern, der aus einem durchgehenden Streckenzug besteht.

zu A 1.4:

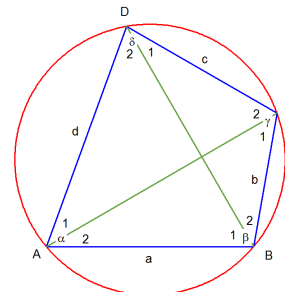
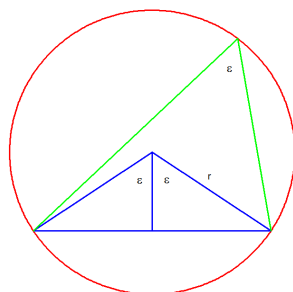
Die Zacke liegt „über“ einer Diagonale des 8-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem übernächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $2 \cdot 360^\circ/8$, also $\varepsilon = 45^\circ$.	Die Zacke liegt „über“ einer Seite des 9-Ecks. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $360^\circ/9$, also $\varepsilon = 20^\circ$.	Die Zacke liegt „über“ einer Diagonale des 10-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem viertnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $4 \cdot 360^\circ/10$, also $\varepsilon = 72^\circ$.	Die Zacke liegt „über“ einer Diagonale des 12-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem fünfnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $5 \cdot 360^\circ/12$, also $\varepsilon = 75^\circ$.
--	--	---	--

zu A 1.5:

Zu einer Sehne gibt es Umfangswinkel „oberhalb“ bzw. „unterhalb“ der Sehne. Diese ergänzen sich zu 180° . Der Mittelpunktswinkel, der zu einem Umfangswinkel „unterhalb“ der Sehne gehört, ist der Ergänzungswinkel zu dem Mittelpunktswinkel, der zu einem Umfangswinkel „oberhalb“ der Sehne gehört – diese beiden Mittelpunktswinkel ergänzen sich also zu 360° .

Dies ergibt sich aus dem **Kreiswinkelsatz** (vgl. Abb. Mitte):

- Alle Umfangswinkel über einer Sehne sind gleich groß.
- Der Mittelpunktswinkel über einer Sehne ist doppelt so groß wie die zugehörigen Umfangswinkel.



Mit den in der Abbildung rechts stehenden Bezeichnungen ergibt sich:

Folgende Umfangswinkel sind gleich groß ... über der Seite: AB: $\gamma_1 = \delta_2$; BC: $\delta_1 = \alpha_2$; CD: $\alpha_1 = \beta_2$; DA: $\beta_1 = \gamma_2$.

... über bzw. „unter“ der Diagonale: AC: $\delta = 180^\circ - \beta$; BD: $\alpha = 180^\circ - \gamma$,

also: $\alpha + \gamma = 180^\circ$ und $\beta + \delta = 180^\circ$.

Die Zacke liegt über der Diagonale des 9-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem fünfnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $5 \cdot 360^\circ/9$, also $\varepsilon = 100^\circ$.

zu A 1.6:

Der Mittelpunktswinkel ist jeweils größer als 180° .

In der Abbildung links liegt die Zacke über der Diagonale des 11-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem siebten nächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $7 \cdot 360^\circ/11$, also $\varepsilon \approx 114,5^\circ$.

In der Abbildung rechts liegt die Zacke über der Diagonale des 12-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem achtnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $8 \cdot 360^\circ/12$, also $\varepsilon = 120^\circ$.

zu A 1.7:

Da jeder Stern vom Typ $\{n/2\}$ im Innern ein regelmäßiges n -Eck, also einen Stern vom Typ $\{n/1\}$ enthält, sind die außen liegenden Zacken „aufgesetzt“.

zu A 1.8:

Die Zahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ sind Lösungen der Gleichung $x^6 - 1 = 0$. Daher ist die Termdivision $(x^6 - 1) : (x^2 - 1)$ möglich und man erhält als ergänzenden Faktor $(x^4 + x^2 + 1)$.

Durch Ausmultiplizieren kann man überprüfen, dass sich $(x^4 + x^2 + 1)$ darstellen lässt als Produkt $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$.

Man kann dabei z. B. die 3. binomische Formel anwenden:

$$(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x + 1) = ((x^2 + 1) + x) \cdot ((x^2 + 1) - x) = (x^2 + 1)^2 - x^2 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichungen $x^2 + x + 1 = 0$ und $x^2 - x + 1 = 0$ sind:

$$x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i; x_4 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i; x_5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i; x_6 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Punktkoordinaten:

$$(1 | 0); (-1 | 0); \left(-\frac{1}{2} \mid \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{1}{2} \mid \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{1}{2} \mid -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zu A 1.9:

Die Zahlen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ sind Lösungen der Gleichung $x^8 - 1 = 0$. Daher ist die Termdivision $(x^8 - 1) : (x^2 - 1)$ möglich und man erhält als ergänzenden Faktor $(x^6 + x^4 + x^2 + 1)$.

Nachdem man festgestellt hat, dass $x_3 = i$ und $x_4 = -i$ ebenfalls Lösungen der Gleichung $x^8 - 1 = 0$ sind, muss auch nach die Termdivision durch $(x^2 + 1)$ möglich sein, also

$$(x^8 - 1) : (x^2 - 1) \cdot (x^2 + 1) = (x^8 - 1) : (x^4 - 1) = (x^4 + 1)$$

Durch Ausmultiplizieren $(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \cdot (x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ überprüft man, dass dies $(x^4 + 1)$ ergibt.

Die Lösungen der quadratischen Gleichungen $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = 0$ und $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$ sind:

$$x_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i; x_6 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i; x_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i; x_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot i$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Punktkoordinaten:

$$(1 | 0); (-1 | 0); (0 | 1); (0 | -1); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \mid -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mid \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \mid -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

zu A 1.10:

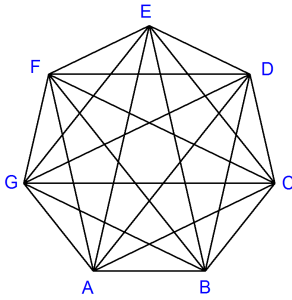
4. Runde: A – E, D – F, C – G, B – H

5. Runde: A – F, E – G, D – H, B – C

6. Runde: A – G, F – H, B – E, C – D

7. Runde: A – H, B – G, C – F, D – E

zu A 1.11:



Wie beim Turnier mit 8 Mannschaften zeichnet man ein regelmäßiges 7-Eck. Die Spielpaarungen ergeben sich aus den einzelnen Seiten und den dazu parallelen Diagonalen; der gegenüberliegende Punkt markiert die spielfreie Mannschaft.

1. Runde: A – B, C – G, D – F, E ist spielfrei
2. Runde: B – C, A – D, E – G, F ist spielfrei
3. Runde: C – D, B – E, A – F, G ist spielfrei
4. Runde: D – E, C – F, B – G, A ist spielfrei
5. Runde: E – F, D – G, A – C, B ist spielfrei
6. Runde: F – G, A – E, B – D, C ist spielfrei
7. Runde: G – A, B – F, C – E, D ist spielfrei

zu A 1.12:

Aus der folgenden symmetrischen Tabelle kann man ablesen, dass 15 Spiele stattfinden. In den Randfeldern stehen alle möglichen Paar-Kombinationen (in alphabetischer Reihenfolge notiert).

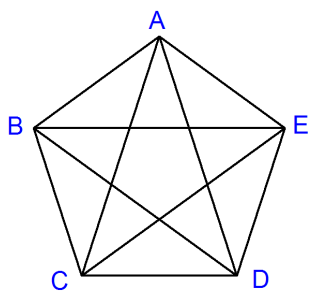
Im Innern der Tabelle steht ein „X“, wenn eine Spielpaarung nicht möglich ist, da ein Spieler doppelt vorkommt. Die Tabelle ist symmetrisch, da mit jeder Spielpaarung auch die umgekehrte Aufzählung der Partie möglich ist.

	AB	AC	AD	AE	BC	BD	BE	CD	CE	DE
AB	X	X	X	X	X	X	X			
AC	X	X	X	X	X			X	X	
AD	X	X	X	X		X		X		X
AE	X	X	X	X			X		X	X
BC	X	X			X	X	X	X	X	
BD	X		X		X	X	X	X		X
BE	X			X	X	X	X		X	X
CD		X	X		X	X		X	X	X
CE		X		X	X		X	X	X	X
DE			X	X		X	X	X	X	X

Damit man einen schönen Spielplan hat, sollte man geometrisch vorgehen.

Man betrachtet ein regelmäßiges Fünfeck und in diesem bestimmte Seiten bzw. Diagonalen, die den Paarkombinationen entsprechen.

Legt man fest, welcher Spieler spielfrei hat, dann kann man die jeweils zusammen spielenden Teilnehmer gemäß einem geometrischen Muster festlegen:



Dem Punkt (spielfreier Teilnehmer) gegenüber liegt ein Trapez, von diesem wähle die beiden parallelen Seiten:

spielfrei	Mannschaft 1	Mannschaft 2
A	CD	BE
B	DE	AC
C	AE	BD
D	AB	CE
E	BC	AD

Dem Punkt gegenüber liegt ein Trapez, von diesem wähle die nicht parallelen Seiten:

spielfrei	Mannschaft 1	Mannschaft 2
A	BC	DE
B	CD	AE
C	DE	AB
D	AE	BC
E	AB	CD

Dem Punkt gegenüber liegt ein Trapez, von diesem wähle die Diagonalen:

spielfrei	Mannschaft 1	Mannschaft 2
A	BD	CE
B	CE	AD
C	AD	BE
D	BE	AC
E	BD	AC

Kap. 2

zu A 2.1:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Σ	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

zu A 2.2:

Um diese Grenzen zu bestimmen, muss eine quadratische (Un-)Gleichung gelöst werden:

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \geq 100 \Leftrightarrow n^2 + n \geq 200 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 \geq 200,25 \Leftrightarrow n \geq 13,65 \Leftrightarrow n \geq 14$$

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \geq 1.000 \Leftrightarrow n^2 + n \geq 2.000 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 \geq 2000,25 \Leftrightarrow n \geq 44,22 \Leftrightarrow n \geq 45$$

$$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) \geq 1.000.000 \Leftrightarrow n^2 + n \geq 2.000.000 \Leftrightarrow (n + \frac{1}{2})^2 \geq 2000000,25 \Leftrightarrow n \geq 1413,71 \Leftrightarrow n \geq 1414$$

zu A 2.3:

Die abgebildeten Quadrate enthalten acht Dreiecke, mit denen die Dreieckszahlen dargestellt werden; zusätzlich liegt in der Mitte ein Punkt. In den Abbildungen sind also die Beziehungen

$$8 \cdot \Delta_3 + 1 = 7^2; \quad 8 \cdot \Delta_4 + 1 = 9^2; \quad 8 \cdot \Delta_5 + 1 = 11^2$$

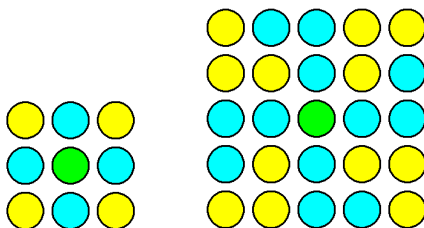
dargestellt. Allgemein lautet die Beziehung:

$$8 \cdot \Delta_n + 1 = (2n+1)^2$$

Der Nachweis der Beziehung kann mithilfe von $\Delta_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) = \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n$ erfolgen:

$$8 \cdot \Delta_n + 1 = 4 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1 = (2n+1)^2$$

Grafiken für $n = 1$ und $n = 2$:



zu A 2.4:

- In den Abbildungen sind zu sehen:

links: $3^2 - 3 = 6$ rote, $6^2 - 6 = 30$ gelbe, $2 \cdot (3 \cdot 6) = 36$ orange farbene Steine;

Mitte: $6^2 - 6 = 30$ rote, $10^2 - 10 = 90$ gelbe, $2 \cdot (6 \cdot 10) = 120$ orange farbene Steine;

Mitte: $10^2 - 10 = 90$ rote, $15^2 - 15 = 210$ gelbe, $2 \cdot (10 \cdot 15) = 300$ orange farbene Steine

$$\text{Allgemein: } (r^2 - r) + (g^2 - g) = 2 \cdot r \cdot g \Leftrightarrow g^2 - 2rg + r^2 = r + g \Leftrightarrow (g - r)^2 = r + g$$

Sind g und r (mit $g > r$) zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen Δ_n und Δ_{n-1} , dann ist deren Differenz gerade gleich n . Nach Formel (2.2) gilt aber gerade: $\Delta_{n-1} + \Delta_n = n^2$.

- Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *Die beiden gezogenen Kugeln haben die gleiche Farbe* berechnet sich wie folgt:

$$P((r|r), (g|g)) = \frac{r \cdot (r-1) + g \cdot (g-1)}{(r+g) \cdot (r+g-1)} = \frac{r^2 + g^2 - r - g}{(r+g) \cdot (r+g-1)}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *Die beiden gezogenen Kugeln haben unterschiedliche Farben* berechnet sich wie folgt:

$$P(r|g), (g|r) = \frac{2 \cdot r \cdot g}{(r + g) \cdot (r + g - 1)}$$

Eine faire Spielregel liegt vor, wenn beide Ereignisse die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, also wenn gilt:

$$\frac{r^2 + g^2 - r - g}{(r + g) \cdot (r + g - 1)} = \frac{2 \cdot r \cdot g}{(r + g) \cdot (r + g - 1)}, \text{ d. h., wenn}$$

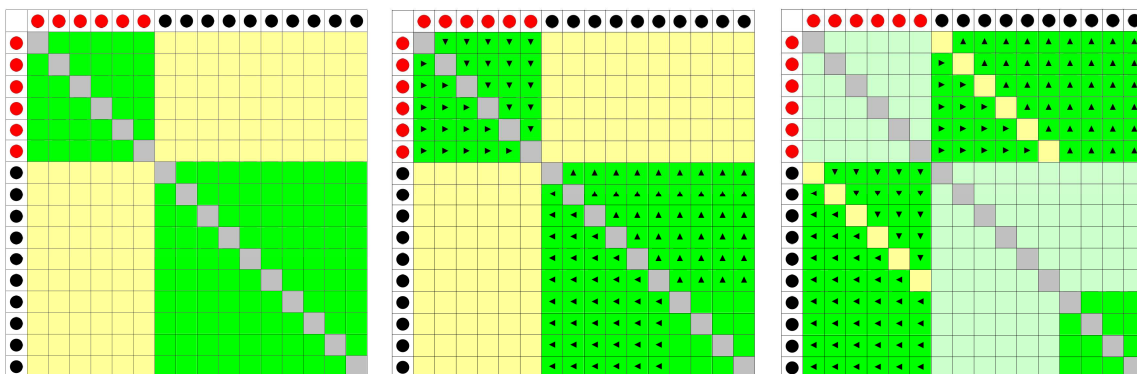
$$r^2 - 2rg + g^2 - r - g = 0, \text{ d. h., wenn}$$

$$(r - g)^2 = r + g \quad \text{oder} \quad (g - r)^2 = r + g$$

Hinweis: An der folgenden Tabelle kann abgelesen werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit man gewinnt, wenn man auf das Ereignis setzt. Dabei wird deutlich, dass es nachteilig wäre, auf das Ereignis zu wetten, wenn die Anzahlen von roten und gelben Kugeln sich nur wenig unterscheiden.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0,000	0,333	0,500	0,600	0,667	0,714	0,750	0,778	0,800	0,818
2	0,333	0,333	0,400	0,467	0,524	0,571	0,611	0,644	0,673	0,697
3	0,500	0,400	0,400	0,429	0,464	0,500	0,533	0,564	0,591	0,615
4	0,600	0,467	0,429	0,429	0,444	0,467	0,491	0,515	0,538	0,560
5	0,667	0,524	0,464	0,444	0,444	0,455	0,470	0,487	0,505	0,524
6	0,714	0,571	0,500	0,467	0,455	0,455	0,462	0,473	0,486	0,500
7	0,750	0,611	0,533	0,491	0,470	0,462	0,462	0,467	0,475	0,485
8	0,778	0,644	0,564	0,515	0,487	0,473	0,467	0,467	0,471	0,477
9	0,800	0,673	0,591	0,538	0,505	0,486	0,475	0,471	0,471	0,474
10	0,818	0,697	0,615	0,560	0,524	0,500	0,485	0,477	0,474	0,474
11	0,833	0,718	0,637	0,581	0,542	0,515	0,497	0,485	0,479	0,476
12	0,846	0,736	0,657	0,600	0,559	0,529	0,509	0,495	0,486	0,481
13	0,857	0,752	0,675	0,618	0,575	0,544	0,521	0,505	0,494	0,486
14	0,867	0,767	0,691	0,634	0,591	0,558	0,533	0,515	0,502	0,493
15	0,875	0,779	0,706	0,649	0,605	0,571	0,545	0,526	0,511	0,500

Das zweifache Ziehen einer Kugel aus der Urne kann mithilfe einer Kombinationstabelle veranschaulicht werden: Da die gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird, kann eine Kugel nicht zweimal gezogen werden (graue Felder). Die zum Ereignis „gleiche Farbe“ gehörenden Kombinationen sind durch die grünen Felder verdeutlicht. Die Pfeilspitzen zeigen an, dass diese Felder in die gelben Felder verschoben werden können. Die nicht verschobenen grünen Felder passen offensichtlich in die noch nicht belegten Felder oben rechts und unten links:



zu A 2.5:

Dargestellt sind vier Dreiecke mit n Reihen, durch die jeweils die Summe $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1)$ dargestellt wird. Offensichtlich gilt:

$$4 \cdot [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] = [(2n - 1) + 1]^2 = (2n)^2 = 4n^2, \text{ also } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = n^2$$

zu A 2.6:

Dargestellt sind zwei Summen von ungeraden natürlichen Zahlen

$$(1 + 3) + 1, (1 + 3 + 5) + (3 + 1), (1 + 3 + 5 + 7) + (5 + 3 + 1), (1 + 3 + 5 + 7 + 9) + (7 + 5 + 3 + 1),$$

also für $n = 1, 2, 3, 4$ die Summen

$$[1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1)] + [(2n - 1) + \dots + 3 + 1] = (n + 1)^2 + n^2 \text{ gemäß Formel (2.3)}$$

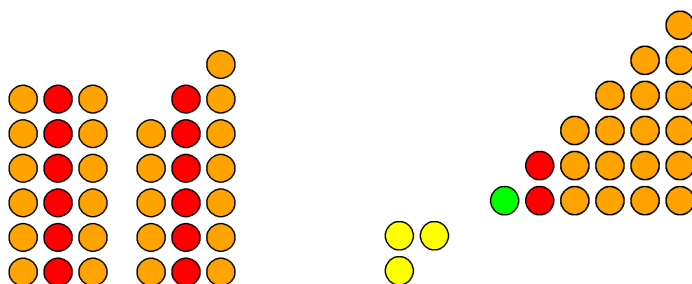
zu A 2.7:

Das Gesamt-Dreieck aus $2n$ Zeilen setzt sich jeweils aus vier kleineren Dreiecken zusammen: drei Dreiecken mit n Zeilen (rot, grün, blau) und ein Dreieck mit $n - 1$ Zeilen (gelb). Wenn dieses kleinere Dreieck um eine Zeile mit n Punkten ergänzt wird, erhält man ein Dreieck mit n Zeilen.

zu A 2.8:

- Die Zahl 18 hat zwei ungerade Teiler: 3 und 9.

Hieraus ergeben sich die beiden Summendarstellungen:



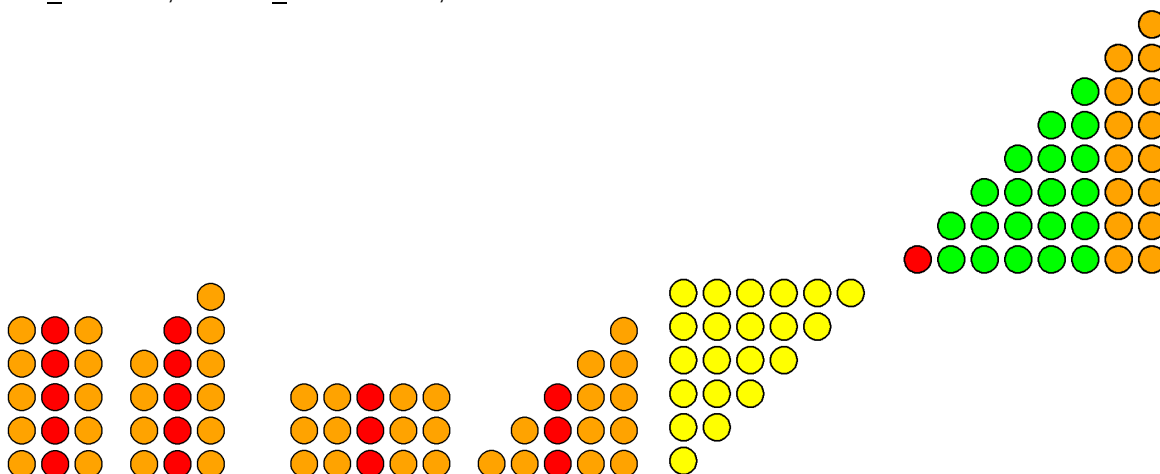
$$5 + 6 + 7 = 18$$

$$3 + 4 + 5 + 6 = 18$$

- Die Zahl 15 hat drei ungerade Teiler: 3, 5, 15.

Hieraus ergeben sich drei Summendarstellungen

$$4 + 5 + 6 = 15, 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15, 7 + 8 = 15$$



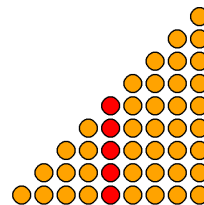
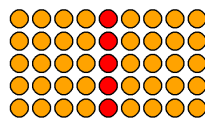
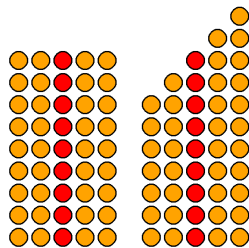
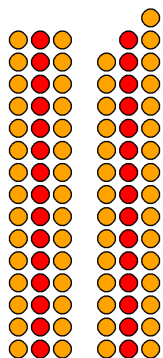
- Die Zahl 45 hat 5 ungerade Teiler: 3, 5, 9, 15, 45.

Hieraus ergeben sich die Summendarstellungen

$$14 + \underline{15} + 16 = 45;$$

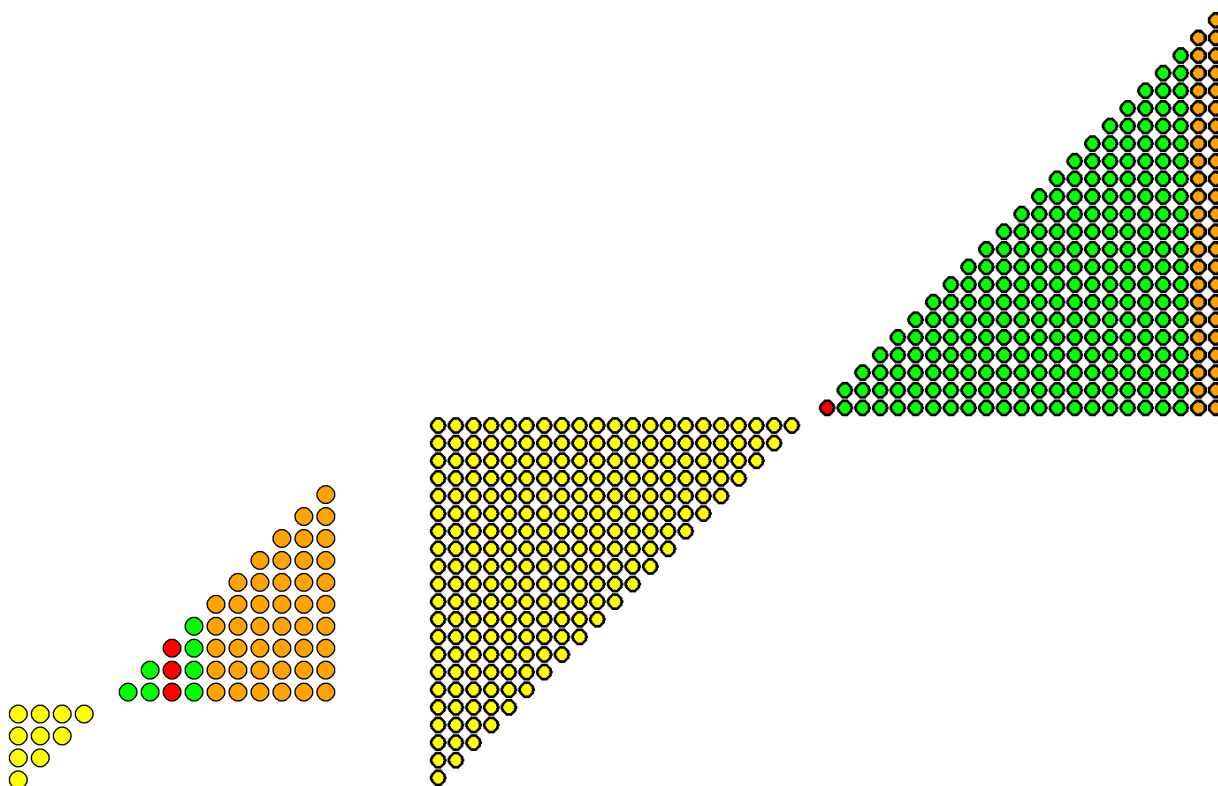
$$7 + 8 + \underline{9} + 10 + 11 = 45;$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \underline{5} + 6 + 7 + 8 + 9 = 45;$$



$$5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45;$$

$$22 + 23 = 45$$



A 2.9:

- Übersicht über die Anzahl der ungeraden Teiler für $n = 3, 4, \dots, 100$

n	ungerade Teiler (> 1)					Anzahl
3	3					1
4						0
5	5					1
6	3					1
7	7					1
8						0
9	3	9				2
10	5					1
11	11					1
12	3					1
13	13					1
14	7					1
15	3	5	15			3
16						0
17	17					1
18	3	9				2
19	19					1
20	5					1
21	3	7	21			3
22	11					1
23	23					1
24	3					1
25	5	25				2
26	13					1
27	3	9	27			3
28	7					1
29	29					1
30	3	5	15			3
31	31					1
32						0
33	3	11	33			3
34	17					1
35	5	7	35			3
36	3	9				2
37	37					1
38	19					1
39	3	13	39			3
40	5					1
41	41					1
42	3	7	21			3
43	43					1
44	11					1
45	3	5	9	15	45	5
46	23					1
47	47					1
48	3					1
49	7	49				2
50	5	25				2
51	3	17	51			3

n	ungerade Teiler (> 1)					Anzahl
52	13					1
53	53					1
54	3	9	27			3
55	5	11	55			3
56	7					1
57	3	19	57			3
58	29					1
59	59					1
60	3	5	15			3
61	61					1
62	31					1
63	3	7	9	21	63	5
64						0
65	5	13	65			3
66	3	11	33			3
67	67					1
68	17					1
69	3	23	69			3
70	5	7	35			3
71	71					1
72	3	9				2
73	73					1
74	37					1
75	3	5	15	25	75	5
76	19					1
77	7	11	77			3
78	3	13	39			3
79	79					1
80	5					1
81	3	9	27	81		4
82	41					1
83	83					1
84	3	7	21			3
85	5	17	85			3
86	43					1
87	3	29	87			3
88	11					1
89	89					1
90	3	5	9	15	45	5
91	7	13	91			3
92	23					1
93	3	31	93			3
94	47					1
95	5	19	95			3
96	3					1
97	97					1
98	7	49				2
99	3	9	11	33	99	5
100	5	25				2

zu A 2.10:

- 2016 hat fünf ungerade Teiler: 3, 7, 9, 21, 63.

Hieraus ergeben sich die fünf Summendarstellungen:

$$2016 = 671 + \underline{672} + 673$$

$$= 285 + 286 + 287 + \underline{288} + 289 + 290 + 291$$

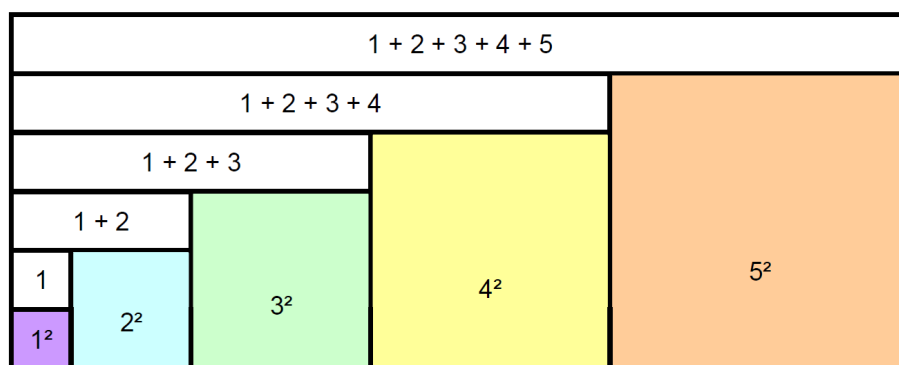
$$= 220 + 221 + 222 + 223 + \underline{224} + 225 + 226 + 227 + 228$$

$$= 86 + 87 + \dots + 95 + \underline{96} + 97 + \dots + 106$$

$$= 1 + 2 + \dots + 32 + 33 + \dots + 64$$

- 2017 ist eine Primzahl, hat also nur 1 Teiler,
- $2018 = 2 \cdot 1009$ hat nur einen ungeraden Teiler (2009 ist Primzahl),
- $2019 = 3 \cdot 673$ hat drei ungerade Teiler,
- $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ hat drei ungerade Teiler,
- $2021 = 43 \cdot 47$ hat drei ungerade Teiler,
- $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ hat drei ungerade Teiler,
- $2023 = 7 \cdot 17^2$ hat fünf ungerade Teiler,
- $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ hat drei ungerade Teiler.
- $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ hat vierzehn ungerade Teiler.

zu A 2.11:



Die Rechteckfigur mit der Breite $1 + 2 + 3 + 4 + 5$ und der Höhe $1 + 5$ setzt sich zusammen aus den Quadraten mit den Flächeninhalten 1^2 , 2^2 , 3^2 , 4^2 und 5^2 sowie den Rechteckstreifen der Höhe 1 mit den Flächeninhalten $1 \cdot 1$, $1 \cdot (1 + 2)$, $1 \cdot (1 + 2 + 3)$, $1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4)$ und $1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$.

Es gilt also:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + (1) + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) + (1+2+3+4+5) = (1+2+3+4+5) \cdot 6$$

Ersetzt man die auf der linken Seite in Klammern stehenden Summen von natürlichen Zahlen jeweils durch den o. a. Summenterm, also

$$1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1; 1 + 2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2; 1 + 2 + 3 = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3; 1 + 2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4;$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{1}{2} \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 5,$$

so ergibt sich:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + (\frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 1) + (\frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 2) + (\frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 3) + (\frac{1}{2} \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4) + (\frac{1}{2} \cdot 5^2 + \frac{1}{2} \cdot 5) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6$$

Nach Auflösen der Klammern und Umordnen folgt hieraus:

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + \frac{1}{2} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) + \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 6$$

und weiter

$$^3/2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = ^{11}/2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

Auflösen nach der Summe der Quadratzahlen ergibt dann

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = ^{11}/3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$

und nach Ersetzen des Summenterms für die ersten 5 natürlichen Zahlen

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = ^{11}/3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5^2 + 5) = 55$$

zu A 2.12:

Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$

Für die Summe der ersten n geraden Quadratzahlen folgt hieraus:

$$2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2 = 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = \frac{2}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)$$

Daher gilt für die Summe der ersten n ungeraden Quadratzahlen:

$$\begin{aligned} 1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 &= [1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2] - [2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2] = \frac{1}{6} \cdot 2n \cdot (2n+1) \cdot (4n+1) - \frac{2}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (2n+1) \\ &= \frac{1}{3} \cdot n \cdot (2n+1) \cdot [4n+1 - 2n - 2] = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (2n+1) \cdot (2n-1). \end{aligned}$$

- *Hinweis:* Wunderbare geometrische Veranschaulichungen findet man unter:

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_unger_Quadratzahlen/Summe_unger_Quadratzahlen.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_unger_Quadratzahlen2/Summe_unger_Quadratzahlen2.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/S/Summe_unger_Quadratzahlen3/Summe_unger_Quadratzahlen3.htm

zu A 2.13:

Da die Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen eine ungerade Zahl ist, lässt sie sich nach dem Satz von Sylvester stets auch als Summe aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen darstellen.

Beispiele für Summen von aufeinanderfolgenden Quadratzahlen:

$$1^2 + 2^2 = 5 = 2 + 3;$$

$$2^2 + 3^2 = 13 = 6 + 7;$$

$$3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = 12 + 13 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7;$$

$$4^2 + 5^2 = 41 = 20 + 21; \quad 5^2 + 6^2 = 61 = 30 + 31;$$

$$6^2 + 7^2 = 85 = 5 \cdot 17 = 42 + 43 = 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13; \dots$$

Bei einigen dieser Beispiele gibt es offensichtlich mehrere Möglichkeiten der Darstellung. Da aber unter den Beispielen auch Primzahlen sind, die nur einen ungeraden Teiler besitzen (nämlich sich selbst), für es also nur *eine* Möglichkeit der Summendarstellung gibt, bleibt für alle Summen von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen nur *eine* gemeinsame Möglichkeit der Darstellung, nämlich als Summe von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen:

$$n^2 + (n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n) + (n^2 + n + 1) = [n \cdot (n+1)] + [n \cdot (n+1) + 1]$$

zu A 2.14:

In jedem der Dreiecke der linken Seite ist 1-mal die 1 enthalten, 2-mal die 2, 3-mal die 3, 4-mal die 4, 5-mal die 5, 6-mal die 6 und 7-mal die 7; die Summe aller Felder eines Dreiecks ergibt also

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2.$$

Im Summendreieck rechts steht in jedem Feld die Summe $2 \cdot 7 + 1 = 15$.

Daher folgt: $3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) \cdot (2 \cdot 7 + 1) = 420$,
also $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$.

Allgemein gilt:

$3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot (2n + 1)$ und hieraus folgt wegen
 $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$ die Behauptung.

zu A 2.15:

Die „nächsten“ Gleichungen, für welche die besondere Summendarstellung gilt, lauten:

- Die Summe der ersten 32 ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von elf aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 10):
 $1^3 + 3^3 + \dots + 63^3 = 2^{10} + 2^{11} + \dots + 2^{20} = 111111111110000000000_2$.
- Die Summe der ersten 64 ungeraden Kubikzahlen ist die Summe von 13 aufeinanderfolgenden Zweierpotenzen (beginnend mit dem Exponenten 12):
 $1^3 + 3^3 + \dots + 127^3 = 2^{12} + 2^{13} + \dots + 2^{24} = 1111111111111000000000000_2$.

Eine Formel zur Berechnung der Summe der ersten n ungeraden Kubikzahlen ergibt sich aus Formel 2.5:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = 2 \cdot n^2 \cdot (n + 1)^2$$

Daher gilt für die Summe der ersten n ungeraden Kubikzahlen:

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 = [1^3 + 2^3 + \dots + (2n)^3] - [2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3] = \frac{1}{4} \cdot (2n)^2 \cdot (2n + 1)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot (n + 1)^2$$

$$= n^2 \cdot (2n + 1)^2 - 2 \cdot n^2 \cdot (n + 1)^2 = n^2 \cdot (4n^2 + 4n + 1 - 2n^2 - 4n - 2) = n^2 \cdot (2n^2 - 1) = 2n^4 - n^2,$$

$$\text{also: } 1^3 + 3^3 + \dots + (2n - 1)^3 = 2n^4 - n^2.$$

Für den Fall, dass es sich bei der ungeraden Zahl $2n - 1$ um den Vorgänger einer Zweierpotenz handelt,

also um $2 \cdot 2 - 1 = 3$, $2 \cdot 2^2 - 1 = 7$, $2 \cdot 2^3 - 1 = 15$, $2 \cdot 2^4 - 1 = 31$ usw.,

kann man diese Beziehung auch wie folgt notieren

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2 \cdot 2^k - 1)^3 = 2 \cdot (2^k)^4 - (2^k)^2 = 2^{4k+1} - 2^{2k}.$$

Zweierpotenzen haben die besondere Eigenschaft, dass sie jeweils um 1 größer sind als die Summe aller Zweierpotenzen mit kleinerem Exponenten: $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Daher kann man 2^{4k+1} notieren als $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{4k}) + 1$ und 2^{2k} als $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2k-1}) + 1$,

$$\text{also } 1^3 + 3^3 + \dots + (2 \cdot 2^k - 1)^3 = 2^{4k+1} - 2^{2k} = 2^{4k+1} + 2^{2k+1} + \dots + 2^{4k}.$$

zu A 2.16:

Weitere Beispiele für Summen von aufeinanderfolgenden Kubikzahlen:

$$4^3 + 5^3 = 189 = 3^3 \cdot 7 = 94 + 95 = 62 + 63 + 64 = 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30$$

$$17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 = \dots \text{ (Zerlegung in 2, 3, 7, 9, 21, 27 oder 63 Summanden);}$$

$$5^3 + 6^3 = 341 = 11 \cdot 31 = 170 + 171 = 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 = \dots$$

(Zerlegung in 2, 11 oder 31 Summanden);

$$6^3 + 7^3 = 559 = 13 \cdot 43 = \dots \text{ (Zerlegung in 2, 13 oder 43 Summanden)}$$

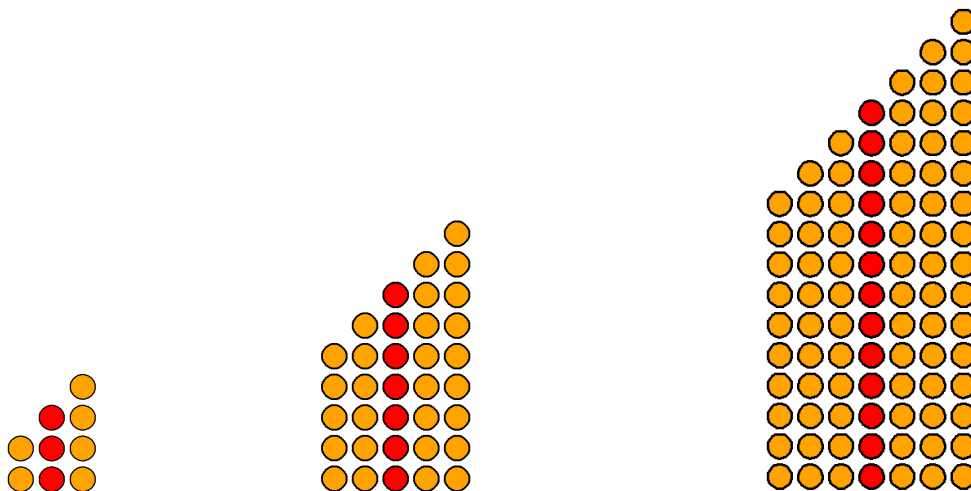
Aus den Beispielen ergibt sich die Vermutung, dass es zwei gemeinsame Möglichkeiten der Summendarstellung gibt:

- Darstellung als Summe von zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen:
 $n^3 + (n+1)^3 = n^3 + (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = [n^3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot n \cdot (n+1)] + [n^3 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot n \cdot (n+1) + 1]$
Hinweis: $n \cdot (n+1)$ ist eine gerade Zahl, daher ist die Hälfte davon ganzzahlig.
- Darstellung als Summe von $2n + 1$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen: Die Summe der Kubikzahlen $n^3 + (n+1)^3$ ist durch $2n + 1$ teilbar; der Quotient ist $n^2 + n + 1$, d. h., der mittlere der $2n + 1$ Summanden ist $n^2 + n + 1$, die Summe lautet demnach: $(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + 2n + 1)$, also $n^3 + (n+1)^3 = (n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n^2 + 2n + 1)$.

$$1^3 + 2^3 = 2 + 3 + 4$$

$$2^3 + 3^3 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

$$3^3 + 4^3 = 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$$



Hinweis: Eine räumliche Veranschaulichung dieser Zerlegung findet man in Roger B. Nelsen: *Proofs without Words II*, MAA, 2000, S. 94.

zu A 2.17:

Für drei benachbarte Winkelhaken gilt: Eine ungerade Quadratzahl, die Summe von drei benachbarten ungeraden Zahlen ist, muss durch 3 teilbar sein (da die erste der drei Zahlen um 2 kleiner ist als die mittlere Zahl und die dritte um 2 größer). Daher ergibt sich

$$9^2 = 81 = 25 + 27 + 29 = (12 + 13) + (13 + 14) + (14 + 15)$$

als Gesamtzahl der blauen Steine in den drei Winkelhaken und 12^2 als Anzahl der roten Steine und 15^2 als Gesamtzahl der roten und blauen Steine, vgl. Abbildung in der Aufgabenstellung.

Hier die ersten Zahlentripel des Typs mit drei Winkelhaken:

n	$a_n = 3 \cdot (2n+1)$	$9 \cdot (2n + 1)^2 = 36n^2 + 36n + 9$	$b_n = 6n \cdot (n + 1)$	$c_n = 6n \cdot (n + 1) + 3$
1	9	$81 = (12 + 13) + (13 + 14) + (14 + 15)$	12	15
2	15	$225 = (36 + 37) + (37 + 38) + (38 + 39)$	36	39
3	21	$441 = (72 + 73) + (73 + 74) + (74 + 75)$	72	75
4	27	$729 = (120 + 121) + (121 + 122) + (122 + 123)$	120	123
5	33	...	180	183
...	...	...	...	...

Die zu den Figuren mit drei Winkelhaken gehörenden Zahlentripel erhält man durch Verdreifachen der Zahlentripel, die man aus den Figuren mit einem Winkelhaken kennt:

$$a_n = 2n + 1; b_n = 3 \cdot (2n + 1)^2; c_n = 2n \cdot (n + 1) + 1$$

Kap. 3

zu A 3.1:

Spieler 1 gewinnt nach Spielregel 1, wenn die Anzahl der Quadrate, die eingezeichnet werden können, gerade ist; er gewinnt nach Spielregel 2, wenn die Anzahl der Quadrattypen (also der Quadrate mit unterschiedlicher Größe) eine gerade Zahl ist.

Die folgende Tabelle enthält eine Übersicht (die man entsprechend fortsetzen kann), wie die $a \times b$ -Rechtecke (also der Breite a und der Höhe b) in möglichst große Quadrate zerlegt werden können. Den verschiedenen unterlegten Farben kann man entnehmen, welcher Spieler das Spiel nach Spielregel 1 oder 2 gewinnt:

Spieler 1 gewinnt nach Spielregel 1 und nach Spielregel 2.
Spieler 1 gewinnt nach Spielregel 1 und verliert nach Spielregel 2.
Spieler 1 verliert nach Spielregel 1 und gewinnt nach Spielregel 2.
Spieler 1 verliert nach Spielregel 1 und nach Spielregel 2.

$\downarrow b \quad a \rightarrow$	1	2	3	4	5	6
1	$1 \cdot 1^2$					
2	$2 \cdot 1^2$	$1 \cdot 2^2$				
3	$3 \cdot 1^2$	$1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$	$1 \cdot 3^2$			
4	$4 \cdot 1^2$	$2 \cdot 2^2$	$1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 1^2$	$1 \cdot 4^2$		
5	$5 \cdot 1^2$	$2 \cdot 2^2 + 1 \cdot 1^2$	$1 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1^2$	$1 \cdot 4^2 + 4 \cdot 1^2$	$1 \cdot 5^2$	
6	$6 \cdot 1^2$	$3 \cdot 2^2$	$2 \cdot 3^2$	$1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 2^2$	$1 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2$	$1 \cdot 6^2$

zu A 3.2:

$$(1) \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3} = [3; 3] \quad (2) \frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4} = [3; 4] \quad (3) \frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5} = [2; 5]$$

$$(4) \frac{17}{6} = 2 + \frac{5}{6} = 2 + \frac{1}{\frac{6}{5}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = [2; 1, 5]$$

$$(5) \frac{16}{7} = 2 + \frac{2}{7} = 2 + \frac{1}{\frac{7}{2}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = [2; 3, 2]$$

$$(6) \frac{19}{8} = 2 + \frac{3}{8} = 2 + \frac{1}{\frac{8}{3}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = [2; 2, 1, 2]$$

zu A 3.3:

$$[a_0; a_1, a_2, a_3] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}}} = a_0 + \frac{1}{\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 + a_3}{a_2 \cdot a_3 + 1}}$$

$$= \frac{a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_0 \cdot a_1 + a_0 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3 + 1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 + a_1 + a_3}$$

zu A 3.4:

Wenn beispielsweise im Kettenbruch-Term $[a_0; a_1, a_2, a_3]$ für a_3 gilt: $a_3 = 1$, dann ist der letzte gemischte Bruch im Kettenbruch gleich $a_2 + \frac{1}{a_3}$, also $a_2 + 1$, d. h., der letzte gemischte Bruch enthält gar keinen Bruch, sondern ist eine natürliche Zahl.

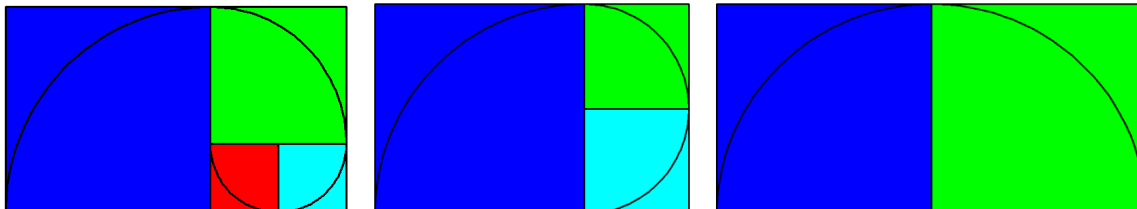
Es gilt also: $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1} + 1]$

zu A 3.5:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{13}} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{13}{30} = \frac{43}{30}$$

zu A 3.6:

Zerlegung eines 3x5-, eines 2x3- sowie eines 1x2-Rechtecks mit Viertelkreis-Spirale



zu A 3.7:

Mithilfe von (3.1) ergibt sich:

$$[1; 2, n] = \frac{1 \cdot 2 \cdot n + 1 + n}{2 \cdot n + 1} = \frac{3n + 1}{2n + 1} = \frac{3 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{3}{2},$$

das Verhältnis der Seitenlängen des Rechtecks geht gegen 1,5 – die Seitenlängen der Rechtecke nähern sich immer mehr dem Verhältnis 3 : 2.

Mithilfe von (3.2) ergibt sich:

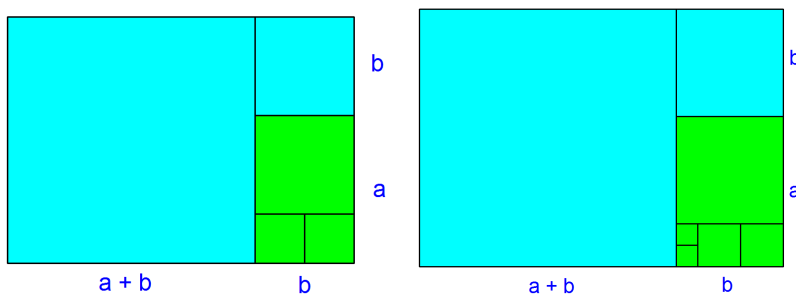
$$[1; 1, 2, n] = \frac{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot n + 1 \cdot 1 + 1 \cdot n + 2 \cdot n + 1}{1 \cdot 2 \cdot n + 1 + n} = \frac{5n + 2}{3n + 1} = \frac{5 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} \rightarrow \frac{5}{3}$$

zu A 3.8:

Quotient der Seitenlängen	$\frac{5}{2} = 2,5$	$\frac{8}{3} = 2,\bar{6}$	$\frac{13}{5} = 2,6$	$\frac{21}{8} = 2,625$	$\frac{34}{13} = 2,61538\dots$	...
Zerlegung	[2 ; 2]	[2 ; 1 , 2]	[2 ; 1 , 1 , 2]	[2 ; 1 , 1 , 1 , 2]	[2 ; 1 , 1 , 1 , 1 , 2]	...

Diese Quotientenfolge durchläuft die gleichen Werte wie die Quotientenfolge von aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen, vermehrt um 1, wie man allgemein wie folgt nachweisen kann:

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n}$$

zu A 3.9:


Der erste Quotient beschreibt ein Rechteck mit den Seiten a und b (das Rechteck zum Kettenbruch [1; 2] ist grün gefärbt). Dieses Rechteck wird beim Übergang zum Kettenbruch [1; 2, 2] ergänzt um ein Quadrat mit Seitenlänge b und um ein Quadrat mit Seitenlänge a + b, sodass ein Rechteck mit den Seitenlängen (a + b) + b und a + b entsteht.

Dies gilt auch für die nächsten Schritte, vgl. Abbildung links.

zu A 3.10:

Quotient der Seitenlängen	$\frac{5}{3} = 1,\bar{6}$	$\frac{19}{11} = 1,\bar{72}$	$\frac{71}{41} = 1,\overline{73170}$	...
Zerlegung	[1 ; 1 , 2]	[1 ; 1 , 2 , 1 , 2]	[1 ; 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2]	...
Kettenbruch	$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$	$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$	$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}}}$	...

Bei dieser Folge von Quotienten wachsen die Werte immer langsamer an und streben gegen einen Grenzwert:

Setzt man für den ersten Quotienten $\frac{a}{b}$, dann gilt für den nächsten Quotienten $\frac{2a+3b}{a+2b}$.

Für den Grenzwert gilt daher:

$$\frac{a}{b} = \frac{2a+3b}{a+2b} \Leftrightarrow a \cdot (a+2b) = (2a+3b) \cdot b \Leftrightarrow a^2 + 2ab = 2ab + 3b^2 \Leftrightarrow a^2 = 3b^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3$$

Der Grenzwert der Folge ist also gleich $[1; \overline{1, 2}] = \sqrt{3}$. Die Rechtecke dieser Folge konvergieren gegen ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis $\sqrt{3} : 1$.

zu A 3.11:

Quotient der Seitenlängen	$\frac{3}{2} = 1,5$	$\frac{7}{5} = 1,4$	$\frac{17}{12} = 1,41\overline{6}$	$\frac{41}{29} = 1,4137\dots$	$\frac{99}{70} = 1,414285\dots$
Abweichung von $\sqrt{2}$	+0,085786	-0,014214	+0,002453	-0,000421	+0,000072

Quotient der Seitenlängen	$\frac{5}{3} = 1,\overline{6}$	$\frac{19}{11} = 1,\overline{72}$	$\frac{71}{41} = 1,\overline{73170}$	$\frac{265}{153} = 1,732026\dots$	$\frac{989}{571} = 1,732049\dots$
Abweichung von $\sqrt{3}$	-0,065384	-0,004778	-0,000343	-0,00025	-0,000002

zu A 3.12:

$$\begin{aligned} \sqrt{6} &= 2 + (\sqrt{6} - 2) = 2 + \frac{(\sqrt{6} - 2) \cdot (\sqrt{6} + 2)}{(\sqrt{6} + 2)} = 2 + \frac{2}{2 + \sqrt{6}} = 2 + \frac{2}{2 + 2 + \frac{2}{2 + \sqrt{6}}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{6}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{6}}}}} \\ &= 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \sqrt{6}}}}}}} = [2; \overline{2, 4}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{7} &= 2 + (\sqrt{7} - 2) = 2 + \frac{(\sqrt{7} - 2) \cdot (\sqrt{7} + 2)}{(\sqrt{7} + 2)} = 2 + \frac{3}{2 + \sqrt{7}} = 2 + \frac{1}{\frac{2 + \sqrt{7}}{3}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{3}} \\
 &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{6}{3 \cdot (\sqrt{7} + 1)}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7} + 1}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7} - 1}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{6}{2 \cdot (\sqrt{7} + 1)}}} \\
 &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{7} + 1}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{7} - 2}{3}}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \sqrt{7}}}}} \\
 &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \sqrt{7}}}}}}}} = \dots = [2; \overline{1, 1, 1, 4}]
 \end{aligned}$$

zu A 3.13:

Betrachtet man beispielsweise den Kettenbruch $[a; b]$, also $a + \frac{1}{b}$, dann ist der Kehrwert davon gleich

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b}} = 0 + \frac{1}{a + \frac{1}{b}}, \text{ also } [0; a, b].$$

Allgemein sind also $[0; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ und $[a_1; a_2, a_3, \dots, a_n]$ Kehrwerte voneinander.

zu A 3.14:

Nach den Anfangswerten $4/1 = [4;]$ und $9/4 = [2; 4]$ sowie $16/9 = [1; 1, 3, 2]$ tritt eine Regelmäßigkeit auf:

$$25/16 = [1; 1, 1, 3, 2]$$

$$36/25 = [1; 2, 3, 1, 2]$$

$$49/36 = [1; 2, 1, 3, 3]$$

$$64/49 = [1; 3, 3, 1, 3]$$

$$81/64 = [1; 3, 1, 3, 4]$$

$$100/81 = [1; 4, 3, 1, 4]$$

$$121/100 = [1; 4, 1, 3, 5]$$

$$144/121 = [1; 5, 3, 1, 5]$$

$$169/144 = [1; 5, 1, 3, 6]$$

$$196/169 = [1; 6, 3, 1, 6]$$

allgemein:

$$(2n + 1)^2 / (2n)^2 = [1; n - 1, 1, 3, n]$$

$$(2n)^2 / (2n - 1)^2 = [1; n - 1, 3, 1, n - 1]$$

Kap. 4

zu A 4.1:

- 3 mögliche Kombinationen auch für den Flächeninhalt 14π :

$$1\pi + 13\pi = 3\pi + 11\pi = 5\pi + 9\pi = 14\pi$$

- 4 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt 16π und 18π :

$$1\pi + 15\pi = 3\pi + 13\pi = 5\pi + 11\pi = 7\pi + 9\pi = 16\pi$$

$$1\pi + 17\pi = 3\pi + 15\pi = 5\pi + 13\pi = 7\pi + 11\pi = 18\pi$$

- 5 mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt 20π und 22π :

$$1\pi + 19\pi = 3\pi + 17\pi = 5\pi + 15\pi = 7\pi + 13\pi = 9\pi + 11\pi = 20\pi$$

$$1\pi + 21\pi = 3\pi + 19\pi = 5\pi + 17\pi = 7\pi + 15\pi = 9\pi + 13\pi = 22\pi$$

allgemein:

- n mögliche Kombinationen für den Flächeninhalt $4n \cdot \pi$ und $(4n + 2) \cdot \pi$:

$$1\pi + (4n - 1) \cdot \pi, 3\pi + (4n - 3) \cdot \pi, 5\pi + (4n - 5) \cdot \pi, \dots, (2n - 1) \cdot \pi + (2n + 1) \cdot \pi$$

$$1\pi + (4n + 1) \cdot \pi, 3\pi + (4n - 1) \cdot \pi, 5\pi + (4n - 3) \cdot \pi, \dots, (2n - 1) \cdot \pi + (2n + 3) \cdot \pi$$

zu A 4.2:

Die folgende Tabelle enthält alle möglichen Kombinationen von *drei* ungeraden Summanden bis zur maximalen Summe 39: links stehen die Summen aus zwei Summanden, oben die hinzukommenden dritten Summanden.

Demnach gibt es

1 Möglichkeit für die Summe 9π aus drei Kreisringen (nämlich $1\pi + 3\pi + 5\pi$),	
1 Möglichkeit für die Summe 11π	2 Möglichkeiten für die Summe 13π
3 Möglichkeiten für die Summe 15π	4 Möglichkeiten für die Summe 17π
5 Möglichkeiten für die Summe 19π	7 Möglichkeiten für die Summe 21π
8 Möglichkeiten für die Summe 23π	10 Möglichkeiten für die Summe 25π
12 Möglichkeiten für die Summe 27π	14 Möglichkeiten für die Summe 29π
16 Möglichkeiten für die Summe 31π	19 Möglichkeiten für die Summe 33π
21 Möglichkeiten für die Summe 35π	24 Möglichkeiten für die Summe 37π
27 Möglichkeiten für die Summe 39π	

aus drei ungeraden Summanden.

Die website <https://oeis.org/> kann dabei helfen, die nächsten Glieder der Folge zu finden.

	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
1 + 3	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39
1 + 5	x	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	
1 + 7	x	x	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39		
1 + 9	x	x	x	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
1 + 11	x	x	x	x	25	27	29	31	33	35	37	39				
1 + 13	x	x	x	x	x	29	31	33	35	37	39					
1 + 15	x	x	x	x	x	x	33	35	37	39						
1 + 17	x	x	x	x	x	x	x	37	39							
3 + 5	x	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39		
3 + 7	x	x	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39			
3 + 9	x	x	x	23	25	27	29	31	33	35	37	39				
3 + 11	x	x	x	x	27	29	31	33	35	37	39					
3 + 13	x	x	x	x	x	31	33	35	37	39						
3 + 15	x	x	x	x	x	x	35	37	39							
3 + 17	x	x	x	x	x	x	x	39								
5 + 7	x	x	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39				
5 + 9	x	x	x	25	27	29	31	33	35	37	39					
5 + 11	x	x	x	x	29	31	33	35	37	39						
5 + 13	x	x	x	x	x	33	35	37	39							
5 + 15	x	x	x	x	x	x	37	39								
7 + 9	x	x	x	27	29	31	33	35	37	39						
7 + 11	x	x	x	x	31	33	35	37	39							
7 + 13	x	x	x	x	x	35	37	39								
7 + 15	x	x	x	x	x	x	39									
9 + 11	x	x	x	x	33	35	37	39								
9 + 13	x	x	x	x	x	37	39									
11 + 13	x	x	x	x	x	39										

Eine andere Methode, die Anzahl der Kombinationen zu finden, könnte mithilfe einer Tabellenkalkulation wie folgt durchgeführt werden:

Zunächst stellt man die Folge der natürlichen Zahlen als Dualzahlen dar; von diesen interessieren diejenigen mit der Quersumme 3. Man betrachtet dann alle Vektoren, dessen Komponenten aus 3 Einsen und ansonsten aus Nullen bestehen. Dann bildet man das Skalarprodukt mit dem Vektor (1, 3, 5, 7, 9, ...).

Die Ziffern der Dualzahlen notiert man in umgekehrter Reihenfolge.

Auf diese Weise erhält man im Prinzip alle Summen mit drei ungeraden Summanden.

Beispiele:

$$7_{10} = {}_2111: \quad (1,1,1) * (1, 3, 5) = 9$$

$$11_{10} = {}_21011: \quad (1,1,0,1) * (1, 3, 5, 7) = 11$$

$$13_{10} = {}_21101: \quad (1,0,1,1) * (1, 3, 5, 7) = 13$$

$$14_{10} = {}_21110: \quad (0,1,1,1) * (1, 3, 5, 7) = 15$$

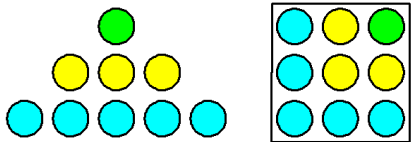
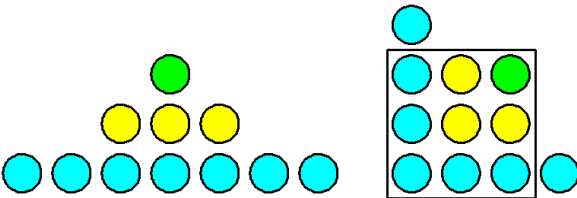
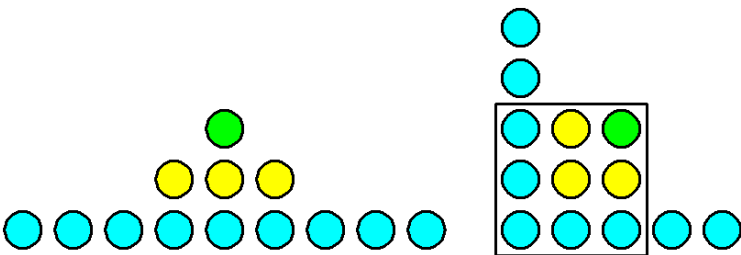
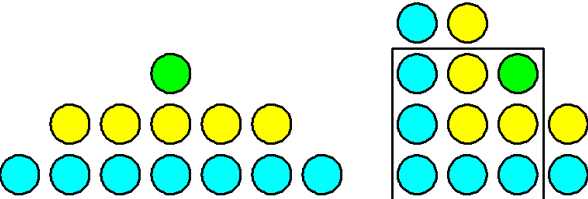
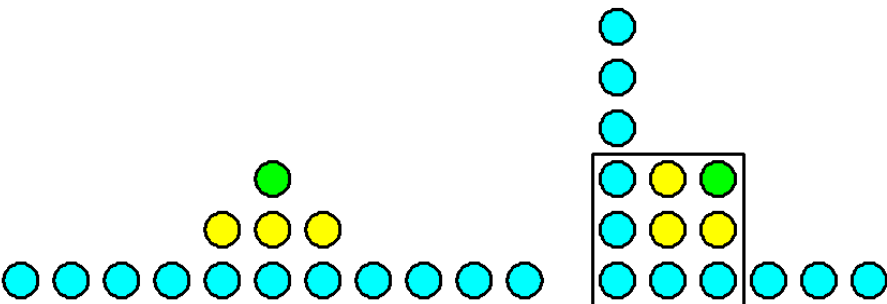
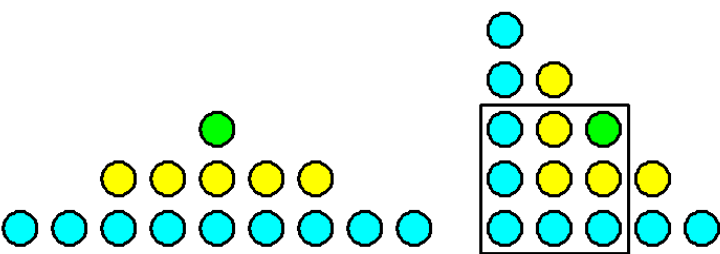
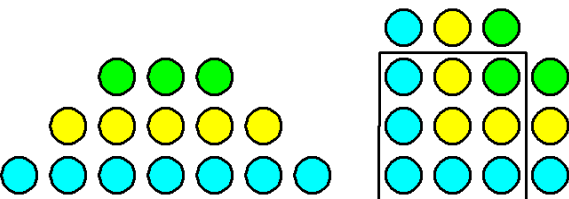
$$19_{10} = {}_210011: \quad (1,1,0,0,1) * (1, 3, 5, 7, 9) = 13$$

$$21_{10} = {}_210101: \quad (1,0,1,0,1) * (1, 3, 5, 7, 9) = 15$$

usw.

Anschließend zählt man, wie oft auf diese Weise die Summen 9, 11, 13, ... zustandekommen.

Erheblich anschaulicher und einfacher umzusetzen ist allerdings die folgende graphische Methode:

$1 + 3 + 5 = 9$ Überstand rechts: 0 Steine ($0 + 0 + 0$)	
$1 + 3 + 7 = 11$ Überstand rechts: 1 Stein	
$1 + 3 + 9 = 13$ Überstand rechts: 2 Steine ($0 + 0 + 2$)	
$1 + 5 + 7 = 13$ Überstand rechts: 2 Steine ($0 + 1 + 1$)	
$1 + 3 + 11 = 15$ Überstand rechts: 3 Steine ($0 + 0 + 3$)	
$1 + 5 + 9 = 15$ Überstand rechts: 3 Steine ($0 + 1 + 2$)	
$3 + 5 + 7 = 15$ Überstand rechts: 3 Steine ($1 + 1 + 1$)	

Die ungerade Anzahl an Steinen wird nicht symmetrisch übereinander angeordnet (wie links dargestellt), sondern als Winkelhaken, wobei die Symmetrieachse in der Diagonale des Quadrats der Seitenlänge 3 liegt.

Die Gesamtzahl der Steine kann an den rechts überstehenden Steinen abgelesen werden:

$$\begin{aligned}\text{Gesamtzahl} &= \text{Steine im Quadrat} + \text{Überstand oben} + \text{Überstand rechts} \\ &= 9 + 2 \cdot \text{Überstand rechts}\end{aligned}$$

Wenn also z. B. 5 Steine rechts überstehen, bedeutet dies, dass die Summe $9 + 2 \cdot 5 = 19$ dargestellt ist.

Wenn man wissen will, auf wie viele Arten bestimmte Summen zustande kommen, muss man nur überlegen, auf wie viele Arten ein bestimmter Überstand möglich ist. Die drei Summanden sind der Größe nach aufsteigend geordnet, beginnend bei 0:

Summe	Überstand	Kombinationen
9	0	$0 + 0 + 0$
11	1	$0 + 0 + 1$
13	2	$0 + 0 + 2, 0 + 1 + 1$
15	3	$0 + 0 + 3, 0 + 1 + 2, 1 + 1 + 1$
17	4	$0 + 0 + 4, 0 + 1 + 3, 0 + 2 + 2, 1 + 1 + 2$
19	5	$0 + 0 + 5, 0 + 1 + 4, 0 + 2 + 3, 1 + 1 + 3, 1 + 2 + 2$
...	...	...

zu A 4.3:

Durch systematisches Probieren findet man:

1 Möglichkeit für die Summe 16π : $1\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi$

1 Möglichkeit für die Summe 18π : $1\pi + 3\pi + 5\pi + 9\pi$

2 Möglichkeiten für die Summe 20π : $1\pi + 3\pi + 5\pi + 11\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 9\pi$

3 Möglichkeiten für die Summe 22π : $1\pi + 3\pi + 5\pi + 13\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 11\pi, 1\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi$

5 Möglichkeiten für die Summe 24π :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 15\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 13\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 11\pi, 1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi, 3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi,$

6 Möglichkeiten für die Summe 26π :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 17\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 15\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 13\pi, 1\pi + 5\pi + 7\pi + 13\pi, 1\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi, 3\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi$

9 Möglichkeiten für die Summe 28π :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 19\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 17\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 15\pi, 1\pi + 3\pi + 11\pi + 13\pi, 1\pi + 5\pi + 7\pi + 15\pi, 1\pi + 5\pi + 9\pi + 13\pi, 1\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi, 3\pi + 5\pi + 7\pi + 13\pi, 3\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi$

11 Möglichkeiten für die Summe 30π :

$1\pi + 3\pi + 5\pi + 21\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 19\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 17\pi, 1\pi + 3\pi + 11\pi + 15\pi, 1\pi + 5\pi + 7\pi + 17\pi, 1\pi + 5\pi + 9\pi + 15\pi, 1\pi + 5\pi + 11\pi + 13\pi, 1\pi + 7\pi + 9\pi + 13\pi, 3\pi + 5\pi + 7\pi + 15\pi, 3\pi + 5\pi + 9\pi + 13\pi, 3\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi$

usw.

Man kann auch so ansetzen:

Aus den 4 Zahlen $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ kann man auf *eine* Art eine Summe mit 4 Summanden bilden:

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi = 16\pi.$$

Aus den 5 Zahlen $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$ kann man auf $\binom{5}{4} = 5$ Arten eine Summe mit 4 Summanden bilden,

also kommen noch 4 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu:

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 9\pi = 18\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 9\pi = 20\pi, 1\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi = 22\pi, 3\pi + 5\pi + 7\pi + 9\pi = 24\pi.$$

Aus den 6 Zahlen $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi$ kann man auf $\binom{6}{4} = 15$ Arten eine Summe mit 4 Summanden

bilden, also kommen noch 10 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu (nämlich alle Summen, in denen 11π als Summand vorkommt), das sind also alle Möglichkeiten mit drei Summanden, für welche die

Zahlen $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$ infrage kommen, das sind $\binom{5}{3} = 10$:

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 11\pi = 20\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 11\pi = 22\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 11\pi = 1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 24\pi, \\ 1\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 26\pi, 1\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 28\pi, \\ 3\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 30\pi, 5\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 32\pi.$$

Aus den 7 Zahlen $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi, 11\pi, 13\pi$ kann man auf $\binom{7}{4} = 35$ Arten eine Summe mit 4

Summanden bilden, also kommen noch 10 weitere Möglichkeiten im Vergleich zu oben hinzu (nämlich alle Summen, in denen 11π als Summand vorkommt), das sind also alle Möglichkeiten mit drei Summanden, für

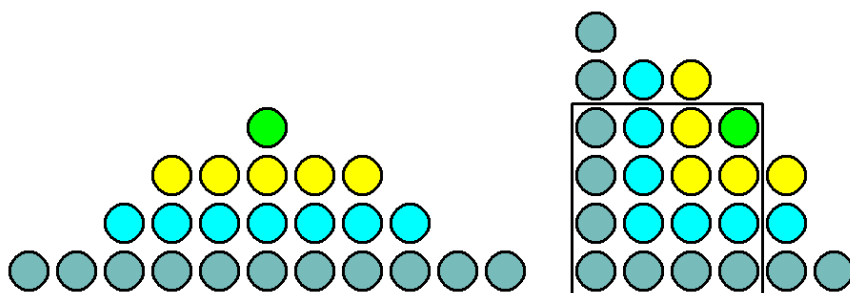
welche die Zahlen $1\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, 9\pi$ infrage kommen, das sind $\binom{5}{3} = 10$:

$$1\pi + 3\pi + 5\pi + 11\pi = 20\pi, 1\pi + 3\pi + 7\pi + 11\pi = 22\pi, 1\pi + 3\pi + 9\pi + 11\pi = 1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 24\pi, \\ 1\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi = 26\pi, 1\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 3\pi + 5\pi + 9\pi + 11\pi = 28\pi, \\ 3\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 30\pi, 5\pi + 7\pi + 9\pi + 11\pi = 32\pi.$$

usw.

Eine andere Möglichkeit ist, die Anzahl der Möglichkeiten mithilfe von Dualzahlen mit Quersumme 4 zu bestimmen (vgl. A 4.2).

Oder man wählt die oben beschriebene graphische Methode, bei der man den Überstand zu einem Quadrat mit 16 Steinen untersuchen muss ... (wie in der Abbildung, dargestellt ist $1 + 5 + 7 + 11$).



zu A 4.4:

Wenn beide Flächen gleich groß sind, dann ist die innen liegende Kreisfläche halb so groß wie die gesamte Kreisfläche. Für die Radien der beiden Kreislinien gilt dann, dass $r_{\text{außen}} = \sqrt{2} \cdot r_{\text{innen}}$, denn für die Flächen gilt: grün + hellblau = $\pi \cdot r_{\text{außen}}^2 = 2 \cdot (\pi \cdot r_{\text{innen}}^2) = 2 \cdot \text{hellblau}$. Da $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, also nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen dargestellt werden kann, gibt es keine geeigneten Kreisinge mit der Breite 1 LE.

Entsprechendes gilt für die zweite Figur, bei der die Gleichung $r_{\text{außen}} = \sqrt{3} \cdot r_{\text{innen}}$ erfüllt sein müsste.

Außerdem müsste gelten: $r_{\text{Mitte}} = \sqrt{2} \cdot r_{\text{innen}}$

Bei der dritten Figur gilt zwar, dass der Radius des äußeren Kreises doppelt so groß ist wie der des blau gefärbten Kreises innen (die rot gefärbte Kreisfläche ist halb so groß wie die gesamte Kreisfläche), aber es müsste außerdem gelten: $r_{\text{zweiter Kreis von innen}} = \sqrt{2} \cdot r_{\text{innen}}$ und außerdem $r_{\text{dritter Kreis von innen}} = \sqrt{3} \cdot r_{\text{innen}}$

zu A 4.5:

In den abgebildeten Figuren sind die inneren 5 Kreisringe hellblau gefärbt; sie haben zusammen einen Flächeninhalt von $5^2 = 25$ FE. Insgesamt umfasst die Figur 7 Kreisringe mit dem Flächeninhalt $7^2 = 49$ FE, d. h., die grünen Kreisringe haben einen Flächeninhalt von $7^2 - 5^2 = 24$ FE.

Es gilt also $\frac{7^2}{5^2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \approx 2$. Der Bruch $\frac{7}{5}$ ist also ein Näherungswert für $\sqrt{2}$. Aus der

Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{2}$ (vgl. Kap. 3) ergibt sich, dass man aus dem Bruch $\frac{a}{b}$ jeweils bessere

Näherungen mithilfe von $\frac{a+2b}{a+b}$ erhält, also aus $\frac{7}{5}$ entsprechend $\frac{17}{12}$ und weiter $\frac{41}{29}$.

zu A 4.6:

Aus der Kettenbruchentwicklung von $\sqrt{3}$ ergeben sich als erste Näherungsbrüche: $\frac{5}{3}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{71}{41}$, d. h., die Kreisflächen stehen im Verhältnis: 25π zu 9π , 361π zu 121π , 5041π zu 1681π .

zu A 4.7:

Dadurch, dass der Mittelpunkt der Kreise jeweils verschoben ist, nimmt die Möglichkeit ab, die Radien miteinander zu vergleichen.

zu A 4.8:

(1) Abgebildet sind Kreisringe mit $r = 1$ und $r = 2$, also $A_{\text{gelb}} = 1\pi$ und $A_{\text{grün}} = A_{\text{hellblau}} = A_{\text{blau}} = (3\pi)/3 = 1\pi$

Es könnte auch sein, dass Vielfache der Radien für die Abbildung verwendet wurden,

hier also z. B. $r = 2$ und $r = 4$: $A_{\text{gelb}} = (1 + 3) \cdot \pi = 4\pi$ und $A_{\text{grün}} = A_{\text{hellblau}} = A_{\text{blau}} = (5\pi + 7\pi)/3 = (12\pi)/3 = 4\pi$

Entsprechendes gilt auch für die folgenden Abbildungen.

(2) $A_{\text{pink}} = 1\pi$; $A_{\text{blauviolett}} = (5\pi)/5 = 1\pi$

(3) $A_{\text{rot}} = 1\pi$; $A_{\text{rosa}} = (7\pi)/7 = 1\pi$

(4) $A_{\text{gelb}} = 1\pi + 3\pi = 4\pi$; $A_{\text{hellblau}} = (7\pi + 9\pi)/4 = 4\pi$

(5) $A_{\text{rosa}} = 1\pi$; $A_{\text{blau/gold}} = (3\pi + 5\pi)/8 = 1\pi$

(6) $A_{\text{blau}} = 3\pi + 5\pi = 8\pi$; $A_{\text{blaugrau}} = (7\pi + 9\pi + 11\pi + 13\pi)/5 = 8\pi$

(7) $A_{\text{orange}} = 3\pi$; $A_{\text{braun}} = (7\pi + 9\pi + 11\pi)/9 = 3\pi$

(8) $A_{\text{oliv}} = 5\pi + 7\pi = 12\pi$; $A_{\text{grün}} = (9\pi + 11\pi + 13\pi + 15\pi)/4 = 12\pi$

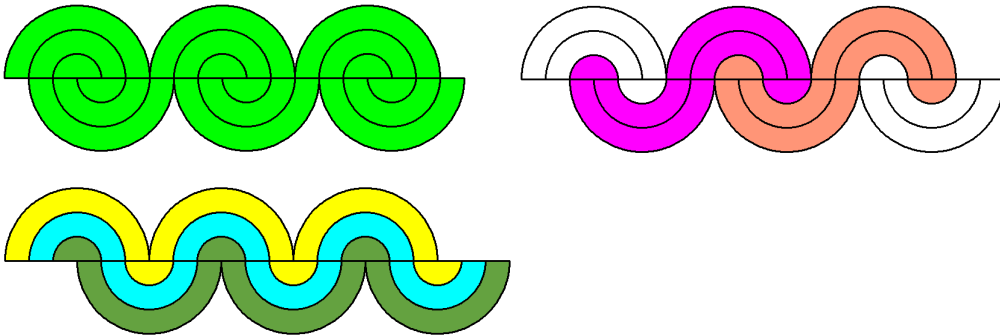
zu A 4.9:

- Figur 1: Die gesamte Fläche von 49π ist orange gefärbt.
- Figur 2: Die grün gefärbte Fläche und die hellblau gefärbte Fläche sind gleich groß:
 $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 3\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 49\pi = 24,5 \cdot \pi$
- Figur 3: grün = violett: $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 5\pi + 7\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 37\pi = 18,5 \cdot \pi$
 blaugrün: $3\pi + 9\pi = 12\pi$
- Figur 4: gelb = orange: $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 7\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 17\pi = 8,5 \cdot \pi$
 rot = rosa: $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 5\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 32\pi = 16\pi$
- Figur 5: rot = orange: $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 9\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 21\pi = 10,5 \cdot \pi$
 rosa = gelb: $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 7\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 23\pi = 11,5 \cdot \pi$
 braun: 5π

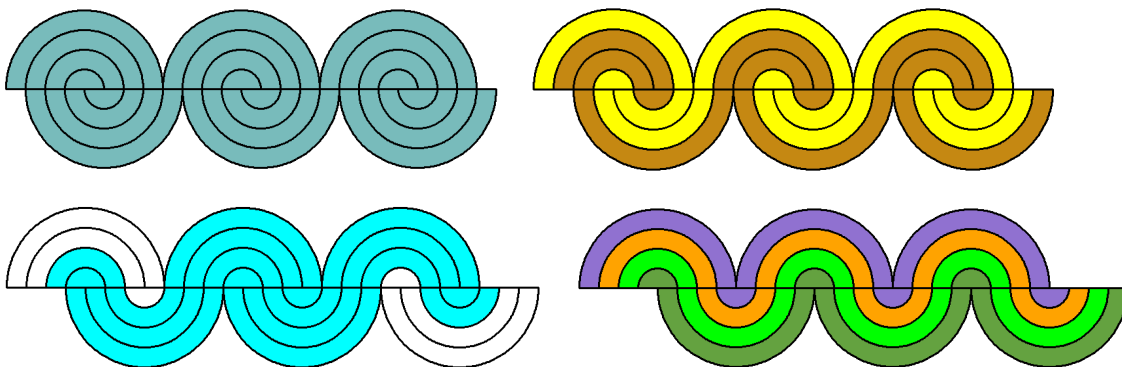
- Figur 6: grau = blauviolett: $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 11\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 25\pi = 12,5 \cdot \pi$
 blau = lila: $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 12\pi = 6\pi$
 hellblau = rot: $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 7\pi) = \frac{1}{2} \cdot 12\pi = 6\pi$
- Figur 7: hellblau = blauviolett: $\frac{1}{2} \cdot (1\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 14\pi = 7\pi$
 grün = lila: $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 14\pi = 7\pi$
 gelb = rot: $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 14\pi = 7\pi$
 orange: 7π
- Figur 8: braun = blauviolett: $\frac{1}{2} \cdot 1\pi = 0,5 \cdot \pi$
 rosa = blaugrau: $\frac{1}{2} \cdot (3\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 16\pi = 8\pi$
 gelb = hellblau: $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 16\pi = 8\pi$
 orange = grün: $\frac{1}{2} \cdot (7\pi + 9\pi) = \frac{1}{2} \cdot 16\pi = 8\pi$
- Figur 9: blau = braun: $\frac{1}{2} \cdot 1\pi = 0,5 \cdot \pi$
 blauviolett = orange: $\frac{1}{2} \cdot 3\pi = 1,5 \cdot \pi$
 grau = rot: $\frac{1}{2} \cdot (5\pi + 13\pi) = \frac{1}{2} \cdot 18\pi = 9\pi$
 grün = lila: $\frac{1}{2} \cdot (7\pi + 11\pi) = \frac{1}{2} \cdot 18\pi = 9\pi$
 hellblau: 9π

zu A 4.10:

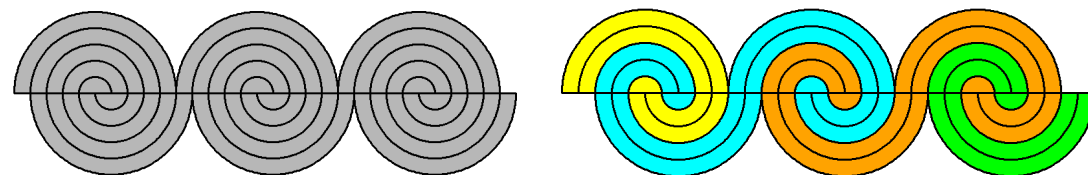
a)

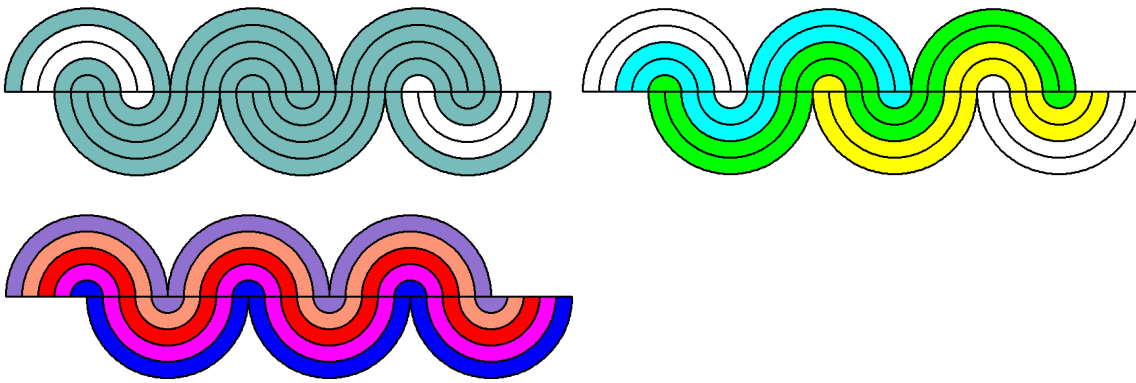


b)



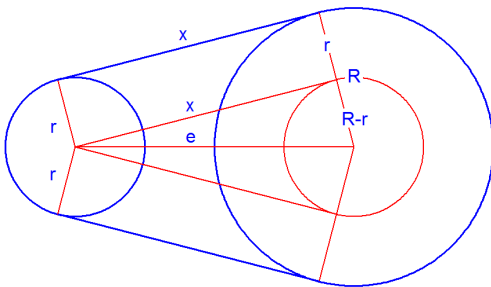
c)





zu A 4.11: Und welche Muster haben Sie noch entdeckt?

zu A 4.12:

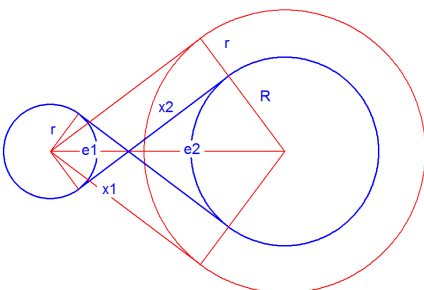


Mithilfe der Beziehung $\sin(\alpha) = (R - r)/e$ kann aus den gegebenen Größen r , R und e der Winkel α bestimmt werden. Die Gesamtlänge u der Bahn ergibt sich aus den Längen der Bögen auf den beiden Kreisen sowie den beiden geraden Strecken der Länge x . Die Länge x kann mithilfe des Satzes von Pythagoras oder mithilfe des Kosinus von α berechnet werden: $\cos(\alpha) = x/e$:

$$u = 2x + b_r + b_R = 2e \cdot \cos(\alpha) + \frac{2\pi \cdot r \cdot (180^\circ - 2\alpha)}{360^\circ} + \frac{2\pi \cdot R \cdot (180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ}$$

$$= 2e \cdot \cos(\alpha) + \pi \cdot r \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{90^\circ}\right) + \pi \cdot R \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right)$$

zu A 4.13:



Der halbe Schnittwinkel zwischen den sich schneidenden Tangenten werde mit α bezeichnet.

Bei gegebenen Radien r und R sowie dem Abstand $e = e_1 + e_2$ zwischen den Mittelpunkten ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\sin(\alpha) = \frac{R + r}{e}; \text{ hieraus kann } \alpha \text{ bestimmt werden. Weiter gilt: } \tan(\alpha) = \frac{R + r}{x}.$$

Hieraus folgt: $x = \frac{R+r}{\tan(\alpha)}$, also gilt für die Länge u der Laufbahn

$$u = 2 \cdot \frac{R+r}{\tan(\alpha)} + \frac{2\pi \cdot r \cdot (180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ} + \frac{2\pi \cdot R \cdot (180^\circ + 2\alpha)}{360^\circ} = 2 \cdot \frac{R+r}{\tan(\alpha)} + \pi \cdot (R+r) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right)$$

Wenn die mittlere von mehreren Bahnen durch die Radien r und R sowie den Abstand e festgelegt ist, dann ergibt sich für die Bahn, die im links abgebildeten Teil innen liegt, ein Radius von $r - d$, rechts dafür ein Radius von $R + d$, wobei d der Abstand der Bahn-Mittellinien ist. Der Abstand e der Mittelpunkte der Kreise sowie der Schnittwinkel α bleiben gleich. Daher sind die beiden Bahnlängen gleich. (Entsprechendes gilt für die Außenbahn links / Innenbahn rechts.)

Ersetzt man im Term für u die Summe $R + r$ durch $e \cdot \sin(\alpha)$, dann ergibt sich:

$$u = 2 \cdot \frac{e \cdot \sin(\alpha)}{\tan(\alpha)} + \pi \cdot e \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right) = e \cdot \left[2 \cdot \cos(\alpha) + \pi \cdot \sin(\alpha) \cdot \left(1 + \frac{\alpha}{90^\circ}\right) \right]$$

Wenn man eine solche Bahn in einem typischen Leichtathletik-Stadion mit 400 m-Bahn einrichten würde ($r = R = 36,80$ cm, $e = 84,40$ m), dann wäre $\alpha \approx 60,7^\circ$ und die Laufbahn hätte eine Länge von ca. 470 m.

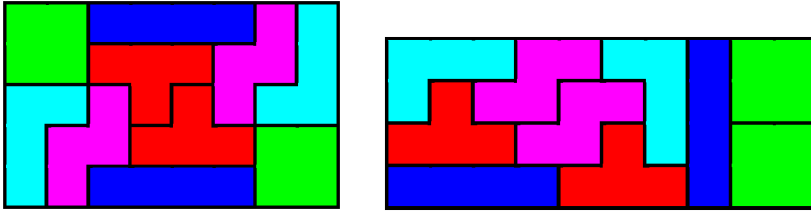
Kap. 5

zu A 5.1:

Das T-Element hat drei dunkle Felder und ein helles Feld (oder umgekehrt). Das Rechteck hat bei einer Schachbrett-Färbung gleich viele helle wie dunkle Felder. Egal, wie man die Felder der fünf Tetrominos färbt: Elf Felder haben die eine und neun Felder die andere Farbe – das passt nicht zusammen.

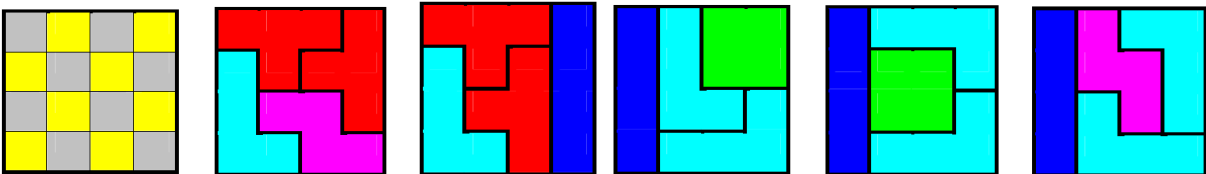
zu A 5.2:

Eine Parkettierung eines 2x20-Rechtecks ist nicht möglich.



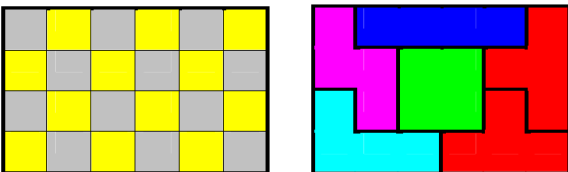
zu A 5.3:

Wenn das T-Element verwendet wird, muss dies (wegen der Schachbrett-Färbung) auch ein zweites Mal vorkommen, und wenn es nicht benutzt wird, sieht man schnell, dass die übrigen vier Elemente nicht gleichzeitig in das Quadrat passen.



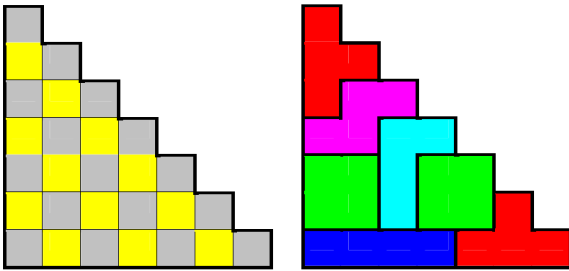
zu A 5.4:

Eine Rechteckfläche mit $4 \times 6 = 24$ Feldern mit mindestens einem Element von jeder Sorte auszulegen, bedeutet, dass man je ein Puzzlestück des Typs I, O, L bzw. S benutzt und zwei Exemplare vom Typ T, die so liegen müssen, dass das eine 3 dunkle Felder und 1 helles Feld besetzt und das andere umgekehrt. .



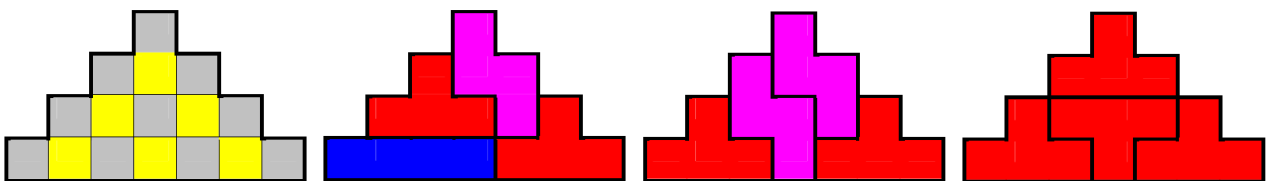
zu A 5.5:

Wenn man die Felder im Stile eines Schachbretts färbt, sind 16 Felder in der einen und 12 in der anderen Farbe gefärbt. Daraus ergibt sich, dass man für die Auslegung mit Tetrominos das T-Element genau zweimal verwenden muss.

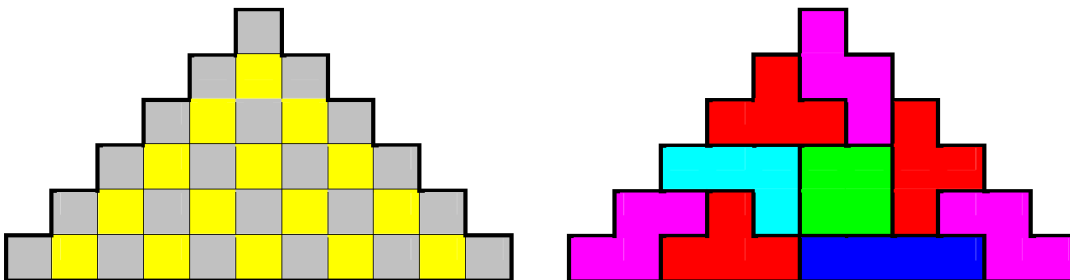


zu A 5.6:

16 Felder: Wenn man Puzzlestücke vom Typ T beim Auslegen der abgebildeten Dreiecksfigur mit $1 + 3 + 5 + 7 = 16$ Feldern verwendet, dann müssen 2 oder 4 Exemplare davon benutzt werden, denn von den 16 Feldern sind bei einer Schachbrett-Färbung $1 + 2 + 3 = 6$ in der einen und die restlichen 10 in der anderen Farbe. Puzzlestücke vom Typ L oder vom Typ O können beim Parkettieren einer solchen Figur nicht verwendet werden, da sie einzelne Felder abtrennen würden, in die kein Tetromino mehr passt.

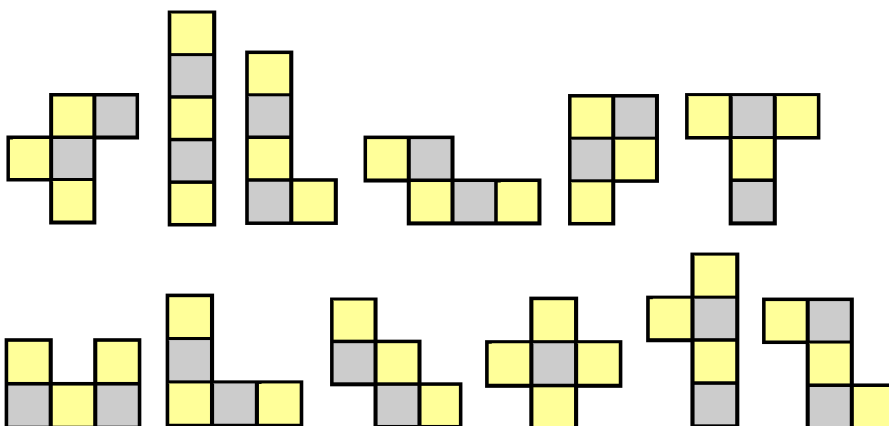


36 Felder: Bei einer Schachbrettfärbung würden von den $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$ Feldern $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ in der einen und die restlichen 21 in der anderen Farbe gefärbt. Wegen des Unterschieds sind 3 (oder 5 oder 7) Puzzles vom Typ T notwendig. Da die Figur groß genug ist, können auch Puzzlestücke vom Typ L oder Typ O verwendet werden.



zu A 5.7:

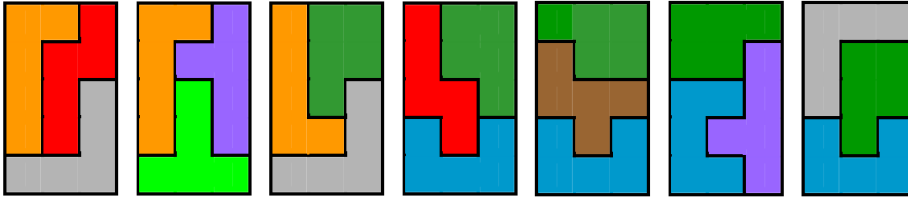
Mit Ausnahme des Elements T, bei dem 4 Felder in der einen Farbe und 1 Feld in der anderen Farbe gefärbt werden, ist bei allen anderen das Verhältnis 3 zu 2.



zu A 5.8:

Alle Möglichkeiten finden Sie auf den im Literaturverzeichnis angegebenen Websites.

zu A 5.9:



zu A 5.10:

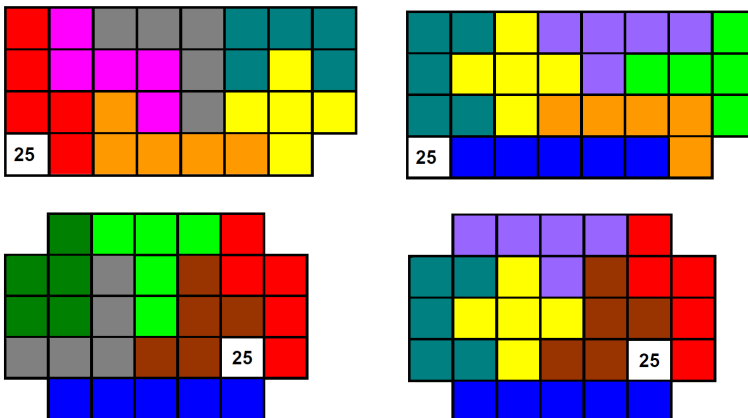
Alle Möglichkeiten finden Sie auf den im Literaturverzeichnis angegebenen Websites.

zu A 5.11:

Alle Möglichkeiten finden Sie auf den im Literaturverzeichnis angegebenen Websites.

zu A 5.12:

Hier zwei je Beispiele für den 25. eines Monats:



zu A 5.13:

Alle Möglichkeiten finden Sie auf den im Literaturverzeichnis angegebenen Websites.

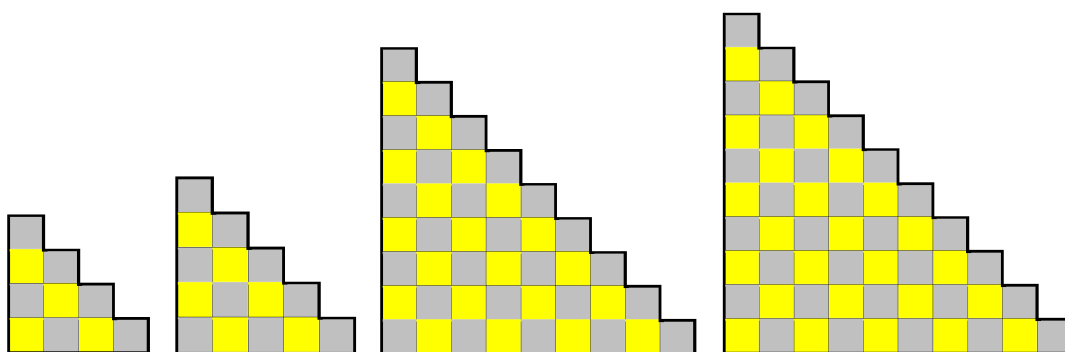
zu A 5.14:

Bei der Dreiecksfigur mit $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ Feldern sind $1 + 3 = 4$ in der einen Farbe und $2 + 4 = 6$ in der anderen Farbe,

bei der Dreiecksfigur mit $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Feldern sind $2 + 4 = 6$ in der einen Farbe und $1 + 3 + 5 = 9$ in der anderen Farbe,

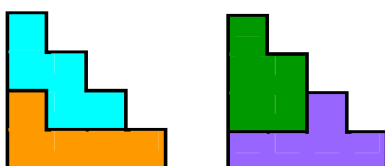
bei der Dreiecksfigur mit $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ Feldern sind $2 + 4 + 6 + 8 = 20$ in der einen Farbe und $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ in der anderen Farbe,

bei der Dreiecksfigur mit $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$ Feldern sind $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$ in der einen Farbe und $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ in der anderen Farbe.



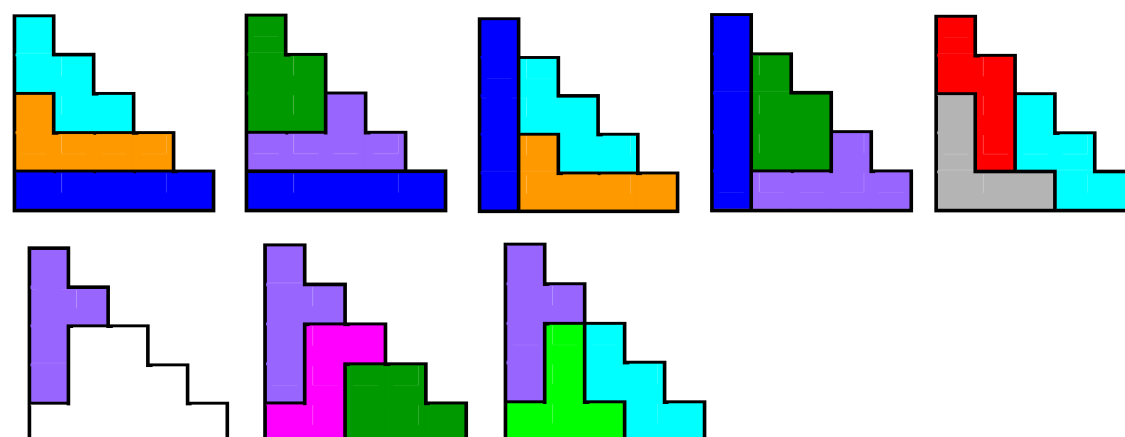
zu A 5.15:

Es gibt 2 Möglichkeiten der Parkettierung der Dreiecksfigur mit 10 Feldern mithilfe von zwei Pentominos.



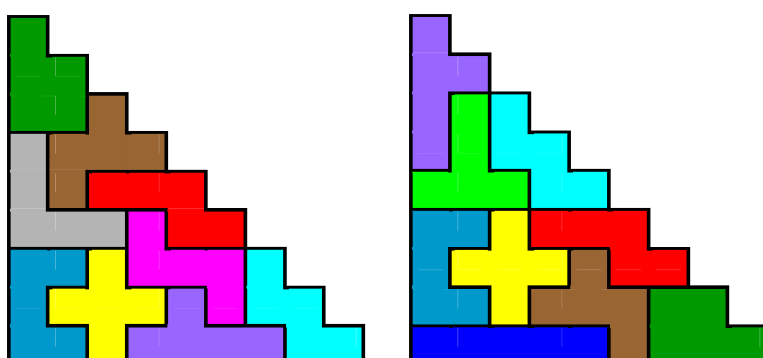
Es gibt 7 Möglichkeiten der Parkettierung der Dreiecksfigur mit 15 Feldern mithilfe von drei Pentominos.

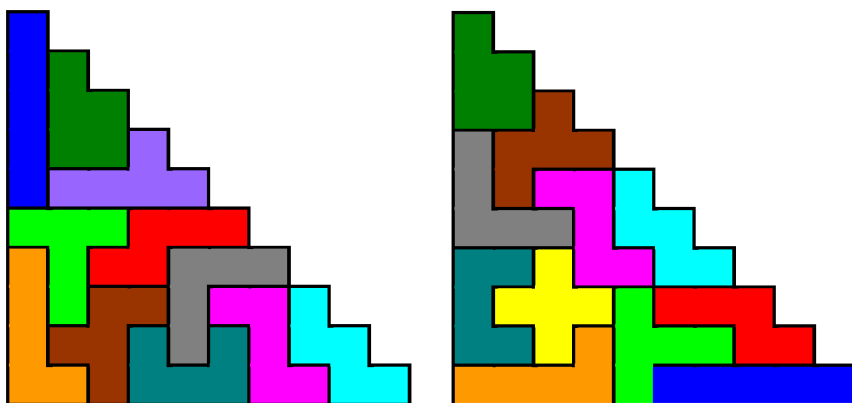
Bei den ersten vier Fällen werden die Parkettierungen der Dreiecksfiguren mit 10 Feldern durch ein Puzzlestück vom Typ I ergänzt. Ein fünfter Typ ist rechts abgebildet. Die letzten beiden Möglichkeiten kann man finden, wenn man beachtet, dass es für die weiß gelassene Teilfigur zwei Möglichkeiten der Parkettierung gibt.



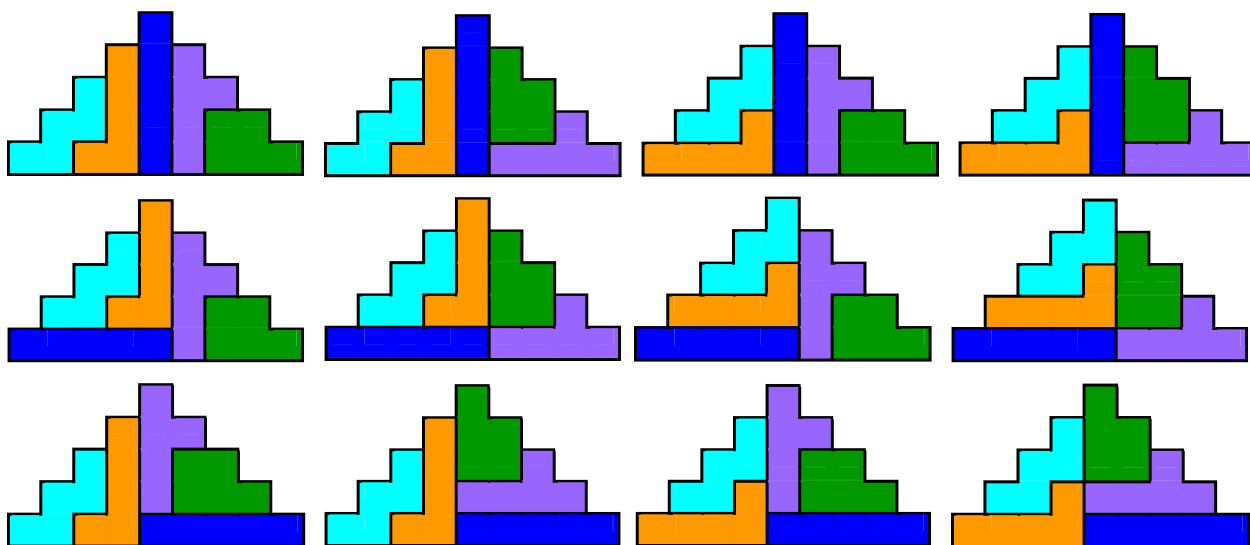
zu A 5.16:

Hier je zwei Beispiele:

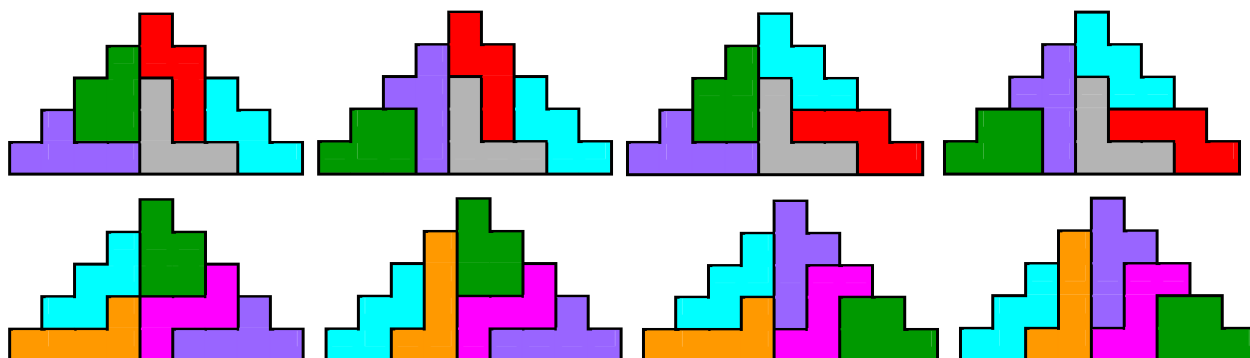




zu A 5.17:

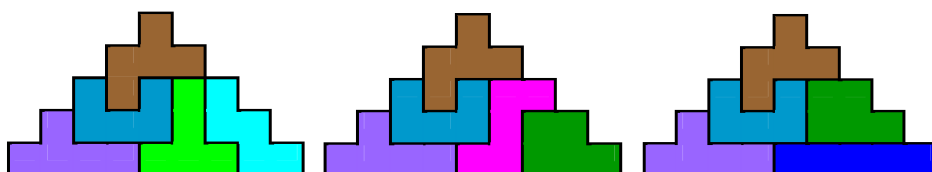


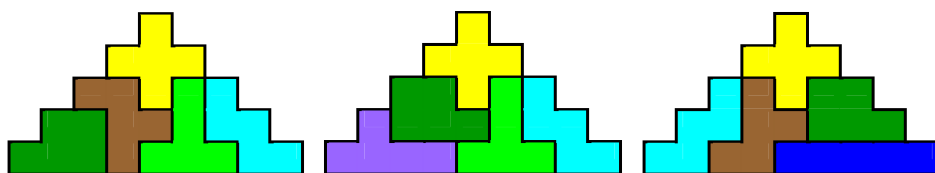
Bei den nächsten Abbildungen werden die oben gefundenen Möglichkeiten zur Parkettierung von Dreiecken mit 10 bzw. 15 Feldern genutzt.



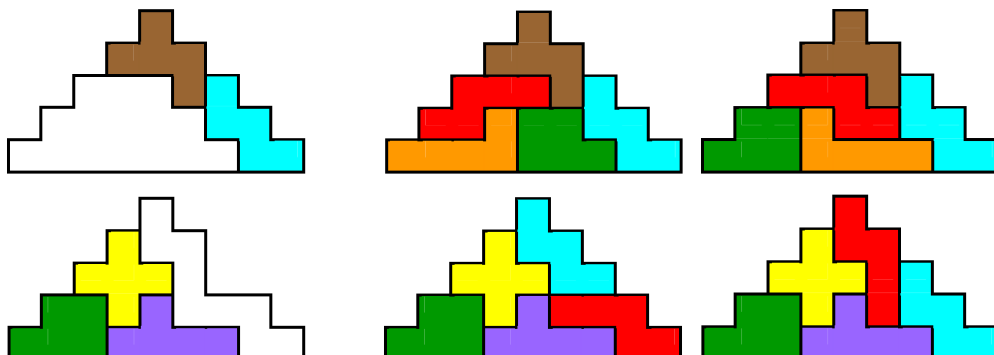
In den nächsten Abbildungen werden Teilflächen auf unterschiedliche Weise parkettiert.

Für die Teilfläche links gibt es vier verschiedene Möglichkeiten, für die Teilfläche rechts drei Möglichkeiten. Diese lassen sich aber nicht unabhängig voneinander kombinieren.

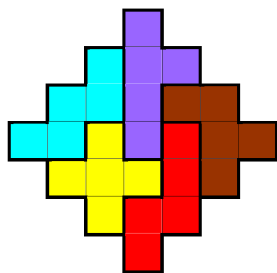




Bei den folgenden Lösungen lässt sich jeweils eine symmetrische Teilfläche spiegeln.

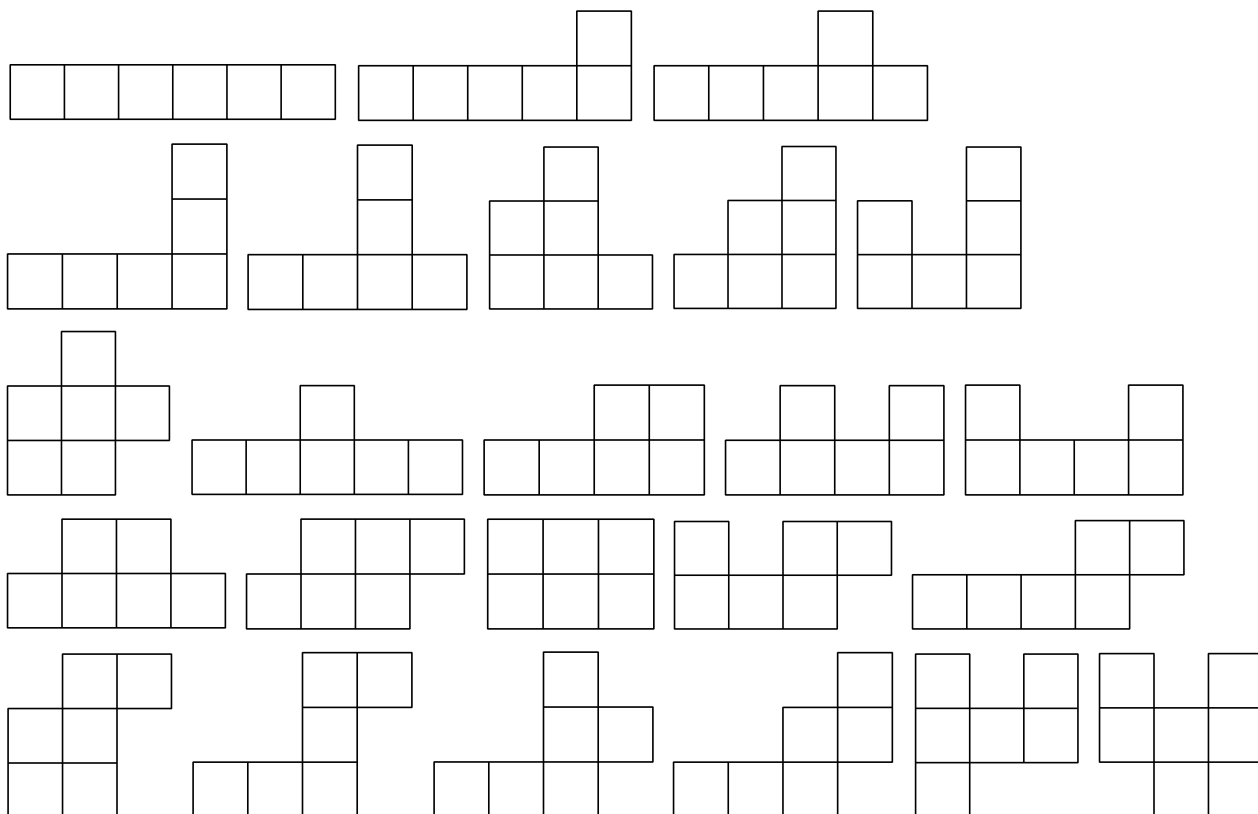


zu A 5.18:



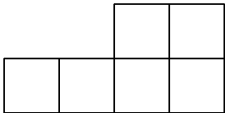
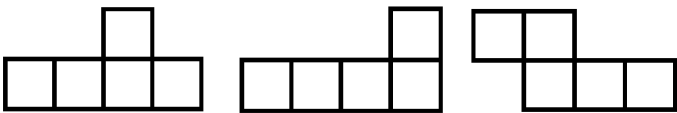
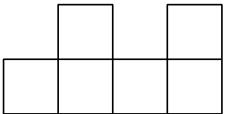
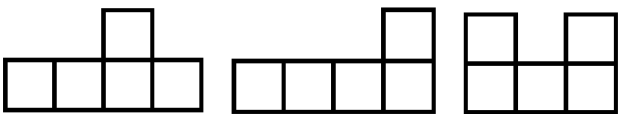
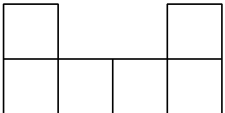
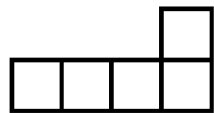
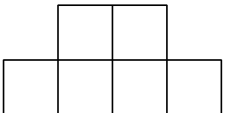
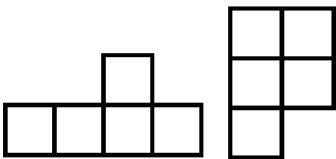
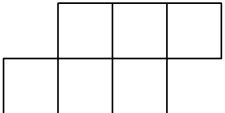
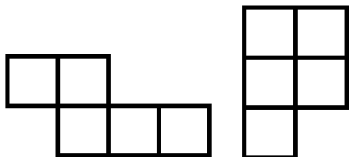
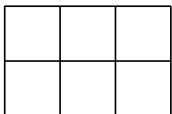
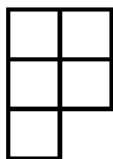
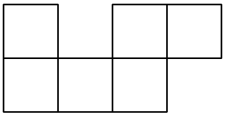
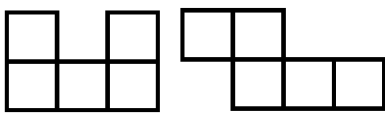
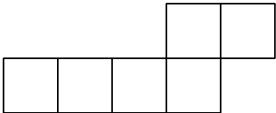
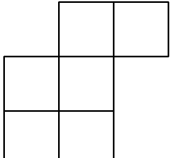
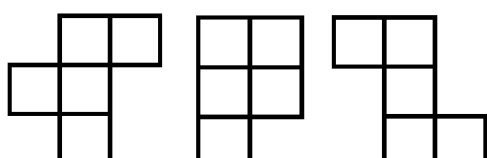
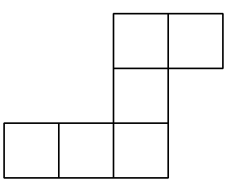
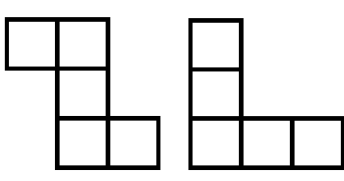
Haben Sie noch ein Beispiel gefunden? (→ strick.lev@t-online.de)

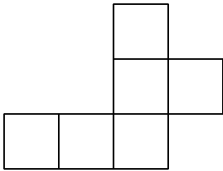
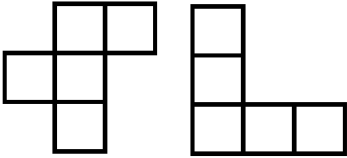
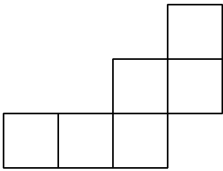
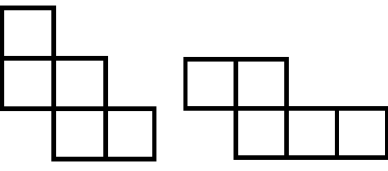
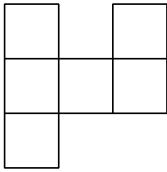
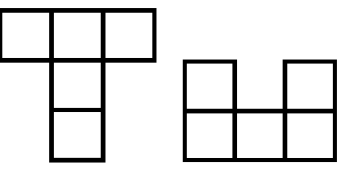
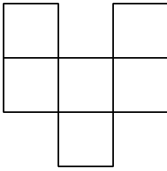
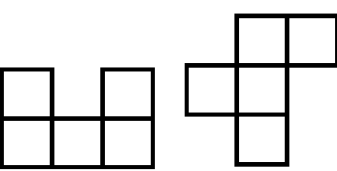
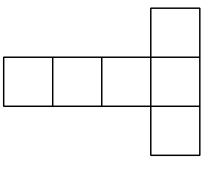
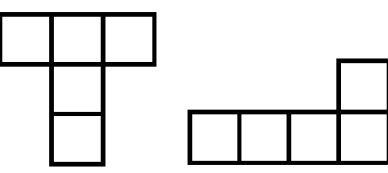
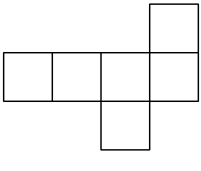
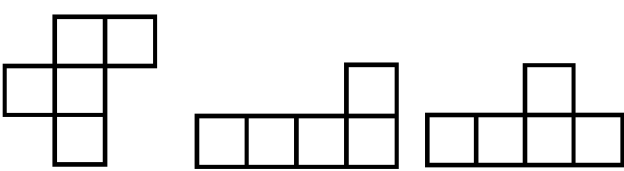
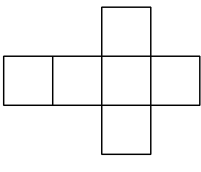
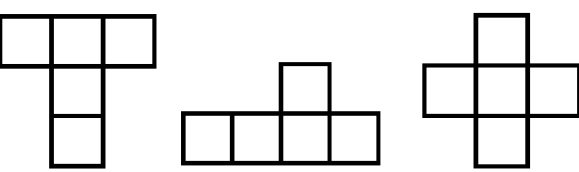
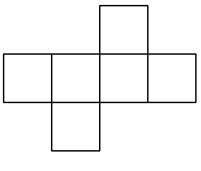
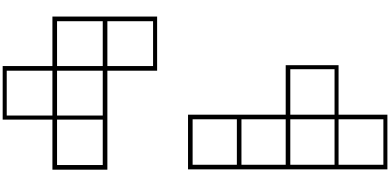
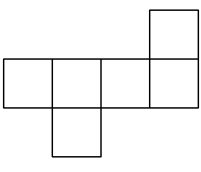
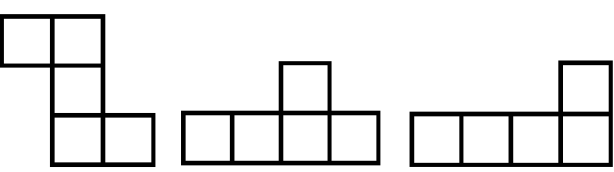
zu A 5.19:

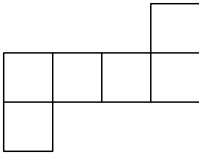
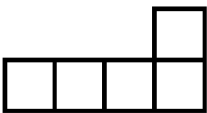
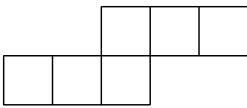
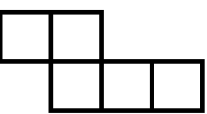
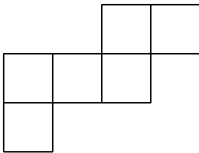
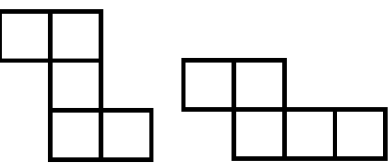
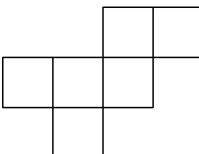
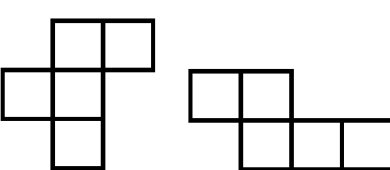
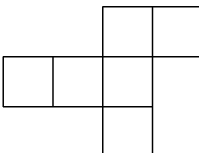
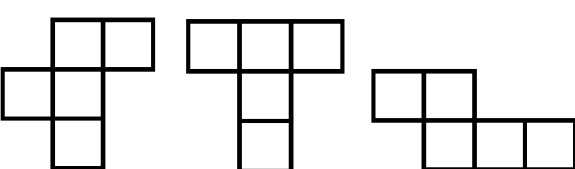
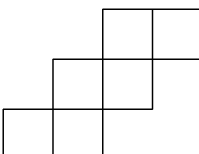
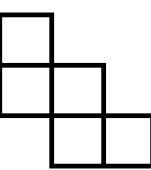


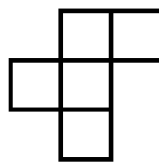
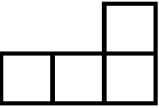
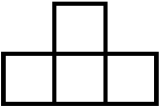
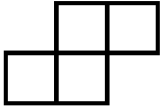
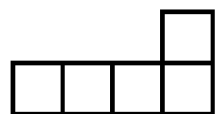
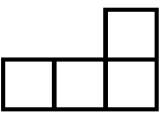
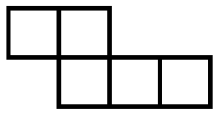
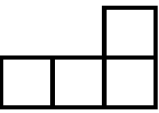
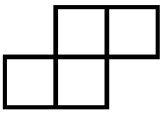
zu A 5.20:

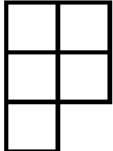
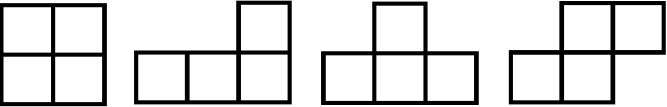
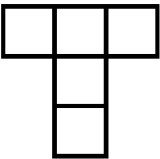
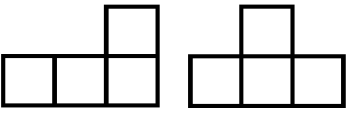
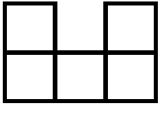
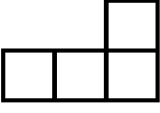
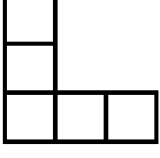
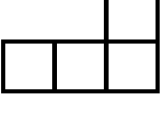
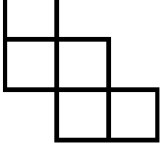
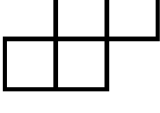
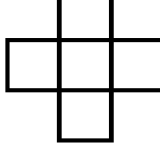
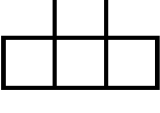
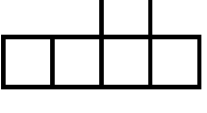
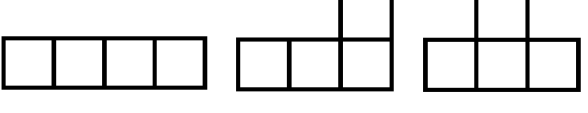
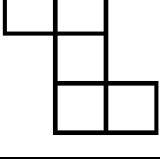
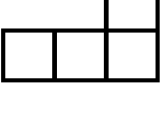
Nr.	Hexomino	entstanden aus Pentomino
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		

30		
31		
32		
33		
34		
35		

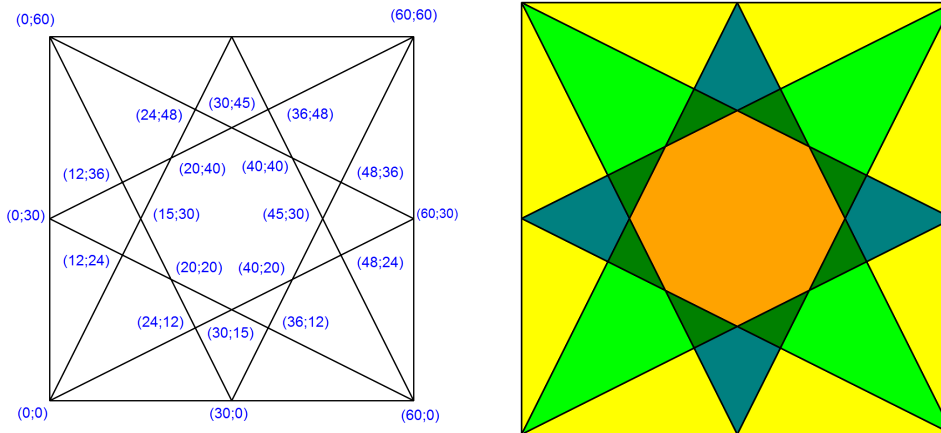
Nr.	Pentomino	entstanden aus Tetromino
1		  
2		
3		 
4		 

5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Kap. 6

zu A 6.1:

Aus den drei Abbildungen mit Gitterlinien ergeben sich die ganzzahligen Koordinaten der Schnittpunkte



sowie die Flächeninhalte: orange: 600 FE, gelb: jeweils 180 FE; hellgrün: jeweils 240 FE; blaugrün jeweils 90 FE; dunkelgrün: jeweils 30 FE.

In der Figur treten mehrere verschieden große rechtwinklige Dreiecke auf (wegen der Symmetrie mehrfach):

- gelbe Dreiecke: Hypotenuse: 30 LE, Katheten: $12 \cdot \sqrt{5}$ LE und $6 \cdot \sqrt{5}$ LE

und zwei Dreiecke, die hierzu ähnlich sind:

- durch die Punkte (0;0), (60;0) und (48;24):
Hypotenuse: 60 LE, Katheten: $24 \cdot \sqrt{5}$ LE und $12 \cdot \sqrt{5}$ LE sowie
- durch die Punkte (0;0), (60;0) und (60;30):
Hypotenuse: $30 \cdot \sqrt{5}$ LE, Katheten: 60 LE und 30 LE

Außerdem ist das Dreieck mit den Eckpunkten (0;0), (24;48) und (60;30) rechtwinklig:

- Hypotenuse: $30 \cdot \sqrt{5}$ LE, Katheten: $18 \cdot \sqrt{5}$ LE und $24 \cdot \sqrt{5}$ LE (also mit dem Seitenverhältnis 3:4:5)

und dazu ähnlich ist das Dreieck den Eckpunkten (0;0), (30;15) und (12;24)

- Hypotenuse: $15 \cdot \sqrt{5}$ LE, Katheten: $12 \cdot \sqrt{5}$ LE und $18 \cdot \sqrt{5}$ LE

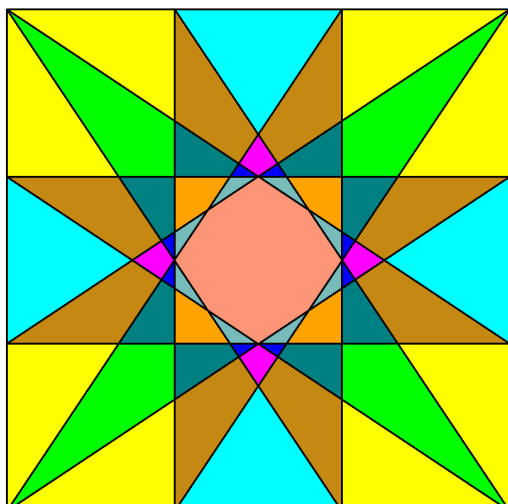
und auch die dunkelgrünen Dreiecke mit

- Hypotenuse: $5 \cdot \sqrt{5}$ LE, Katheten: $3 \cdot \sqrt{5}$ LE und $4 \cdot \sqrt{5}$ LE

und die blaugrünen Viereck bilden zusammen mit einem dunkelgrünen Dreieck ein hierzu ähnliches rechtwinkliges Dreieck mit

- Hypotenuse: $10 \cdot \sqrt{5}$ LE, Katheten: $6 \cdot \sqrt{5}$ LE und $8 \cdot \sqrt{5}$ LE

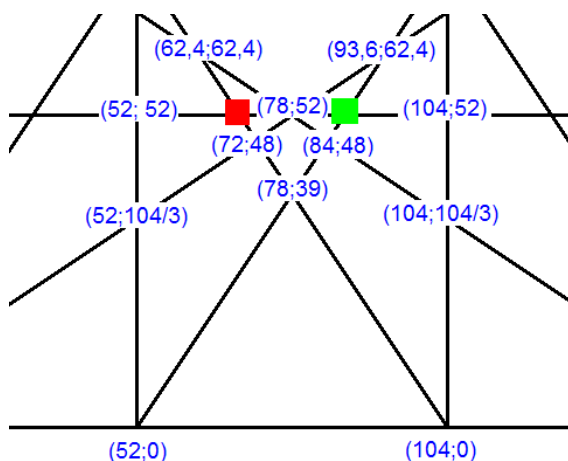
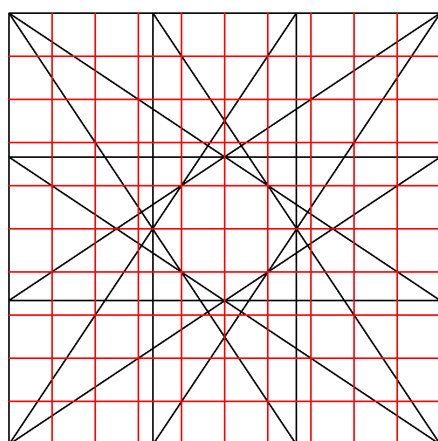
zu A 6.2:



Die Gitterlinien stellen eine Unterteilung der Grundseiten des Quadrats in 12 bzw. in 13 gleich große Abschnitte dar. Daher bietet es sich an, Quadratseiten der Länge $12 \cdot 13 = 156$ LE zu wählen.

Allerdings sind dann noch nicht alle Schnittpunkte ganzzahlig. Beispielsweise findet man weitere Schnittpunkte auf Gitterlinien, wenn man die Quadratseite in 10 gleich große Abschnitte unterteilt.

Der in der Abb. rechts markierte rote Schnittpunkt hat die Koordinaten $(208/3 ; 52)$, der grün markierte Punkt die Koordinaten $(260/3 ; 52)$.



Kap. 7

zu A 7.1:

- **Kontrolle der Endziffern:** 58^2 hat die gleichen Endziffern wie $8^2 = \underline{64}$.

- **Methode 1 (schrittweise Berechnung)**

Hilfsgröße: $55^2 = 50 \cdot 60 + 5^2 = 3025$

$$58^2 = 55^2 + (55 + 56) + (56 + 57) + (57 + 58) = 55^2 + 6 \cdot 56,5 = 3025 + 339 = 3364$$

Hinweis: 56,5 ist der Mittelwert der sechs Summanden.

Hilfsgröße: $60^2 = 3600$

$$58^2 = 60^2 - (60 + 59) - (59 + 58) = 60^2 - 4 \cdot 59 = 3600 - 236 = 3364$$

Hinweis: 59 ist der Mittelwert der vier Summanden.

- **Methode 2 (Berechnung mithilfe einer Zehnerzahl und eines symmetrisch liegenden Partners)**

$$58^2 = (60 - 2) \cdot (56 + 2) = 60 \cdot 56 + 2^2 = 3360 + 4 = 3364$$

$$58^2 = (50 + 8) \cdot (66 - 8) + 8^2 = 50 \cdot 66 + 8^2 = 3300 + 64 = 3364$$

- **Methode 3 (Anwenden der 1. binomischen Formel und Umlegen)**

$$58^2 = (50 + 8)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 8 + 8^2 = 50 \cdot (50 + 2 \cdot 8) + 8^2 = 50 \cdot 66 + 8^2 = 3300 + 64 = 3364$$

$$58^2 = (60 - 2)^2 = 60^2 - 2 \cdot 60 \cdot 2 + 2^2 = 60 \cdot (60 - 2 \cdot 2) + 2^2 = 60 \cdot 56 + 4 = 3360 + 4 = 3364$$

- **Kontrolle der Endziffern:** 84^2 hat die gleichen Endziffern wie $16^2 = \underline{256}$.

- **Methode 1 (schrittweise Berechnung)**

Hilfsgröße: $85^2 = 80 \cdot 90 + 5^2 = 7225$

$$84^2 = 85^2 - (85 + 84) = 85^2 - 2 \cdot 84,5 = 7225 - 169 = 7056$$

Hilfsgröße: $80^2 = 6400$

$$84^2 = 80^2 + (80 + 81) + (81 + 82) + (82 + 83) + (83 + 84) = 80^2 + 8 \cdot 82 = 6400 + 656 = 7056$$

- **Methode 2 (Berechnung mithilfe einer Zehnerzahl und eines symmetrisch liegenden Partners)**

$$84^2 = (80 + 4) \cdot (88 - 4) = 80 \cdot 88 + 4^2 = 7040 + 16 = 7056$$

$$84^2 = (90 - 6) \cdot (78 + 6) + 6^2 = 90 \cdot 78 + 6^2 = 7020 + 36 = 7056$$

- **Methode 3 (Anwenden der 1. binomischen Formel und Umlegen)**

$$84^2 = (80 + 4)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 4 + 4^2 = 80 \cdot (80 + 2 \cdot 4) + 4^2 = 80 \cdot 88 + 4^2 = 7040 + 16 = 7056$$

$$84^2 = (90 - 6)^2 = 90^2 - 2 \cdot 90 \cdot 6 + 6^2 = 90 \cdot (90 - 2 \cdot 6) + 6^2 = 90 \cdot 78 + 6^2 = 7020 + 36 = 7056$$

- **Kontrolle der Endziffern:** 73^2 hat die gleichen Endziffern wie $23^2 = \underline{529}$.

- **Methode 1 (schrittweise Berechnung)**

Hilfsgröße: $75^2 = 70 \cdot 80 + 5^2 = 5625$

$$73^2 = 75^2 - (75 + 74) - (74 + 73) = 75^2 - 4 \cdot 74 = 5625 - 296 = 5329$$

Hilfsgröße: $70^2 = 4900$

$$73^2 = 70^2 + (70 + 71) + (71 + 72) + (72 + 73) = 70^2 + 6 \cdot 71,5 = 4900 + 429 = 5329$$

- **Methode 2 (Berechnung mithilfe einer Zehnerzahl und eines symmetrisch liegenden Partners)**

$$73^2 = (70 + 3) \cdot (76 - 3) = 70 \cdot 76 + 3^2 = 5320 + 9 = 5329$$

$$73^2 = (80 - 7) \cdot (66 + 7) + 7^2 = 80 \cdot 66 + 7^2 = 5280 + 49 = 5329$$

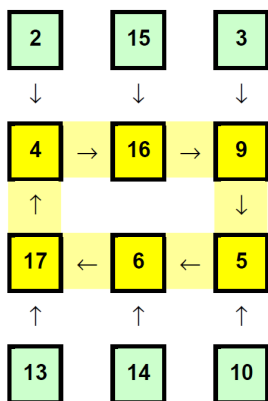
Methode 3 (Anwenden der 1. binomischen Formel und Umlegen)

$$73^2 = (70 + 3)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 3 + 3^2 = 70 \cdot (70 + 2 \cdot 3) + 3^2 = 70 \cdot 76 + 3^2 = 5320 + 9 = 5329$$

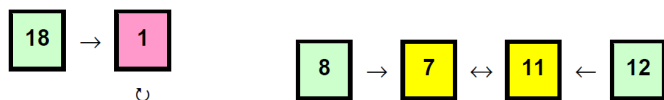
$$73^2 = (80 - 7)^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 7 + 7^2 = 80 \cdot (80 - 2 \cdot 7) + 7^2 = 80 \cdot 66 + 7^2 = 5280 + 49 = 5329$$

zu A 7.2:

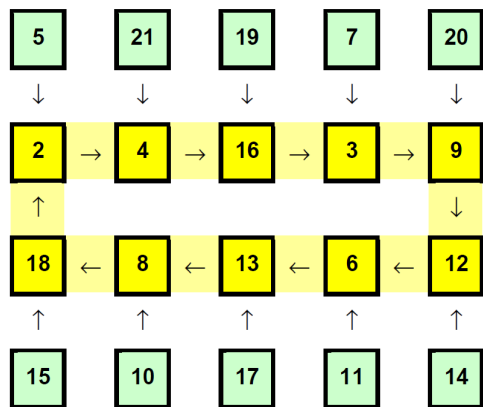
(1) mod 19



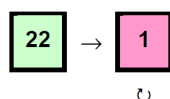
außerdem:



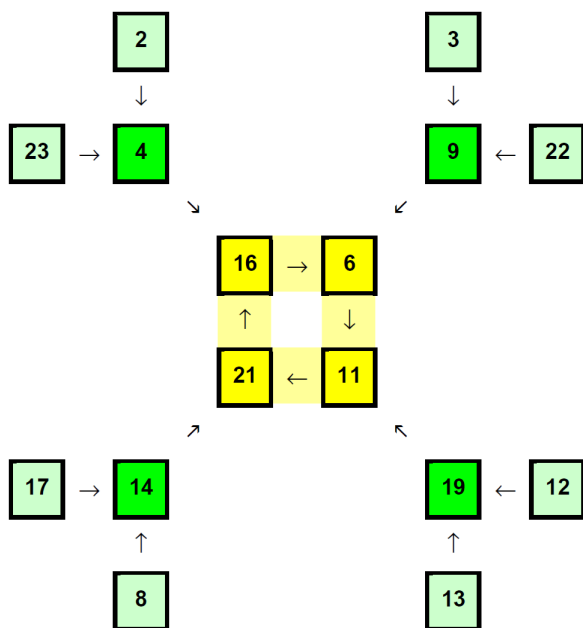
(2) mod 23



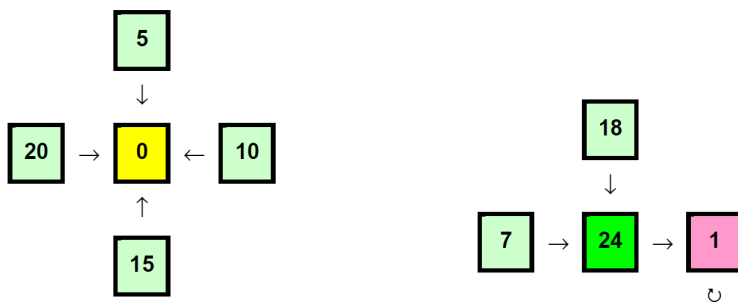
außerdem:



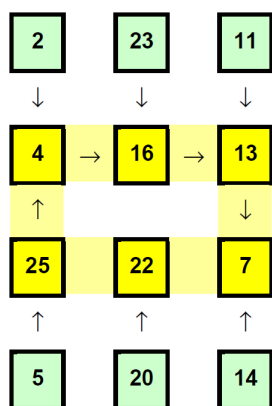
(3) mod 25



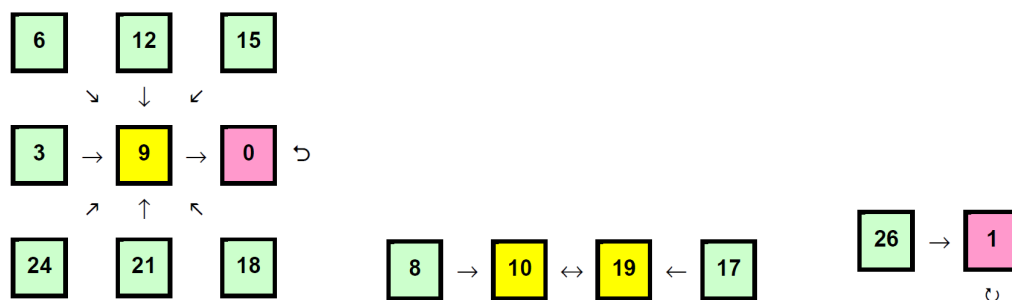
außerdem:



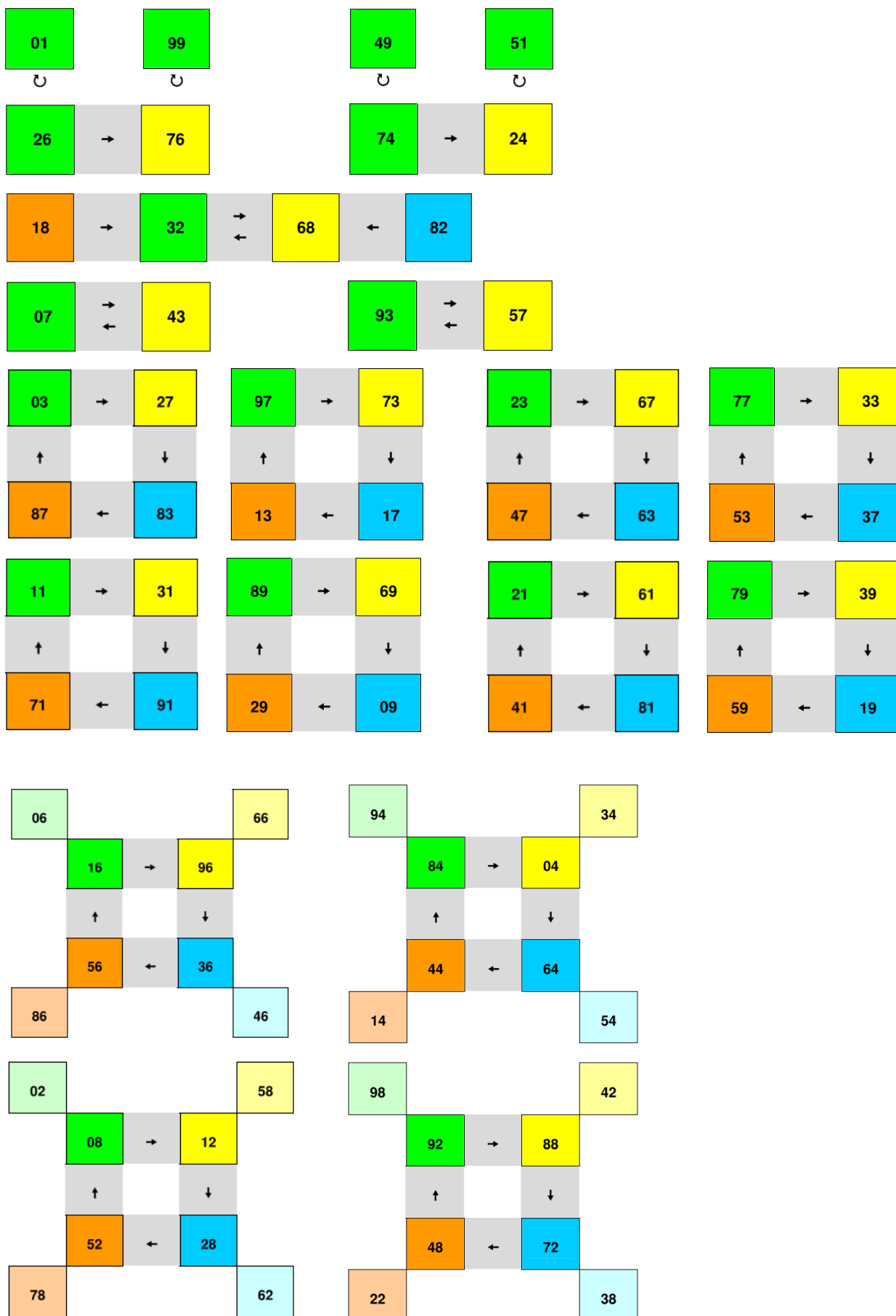
(4) mod 27



außerdem:

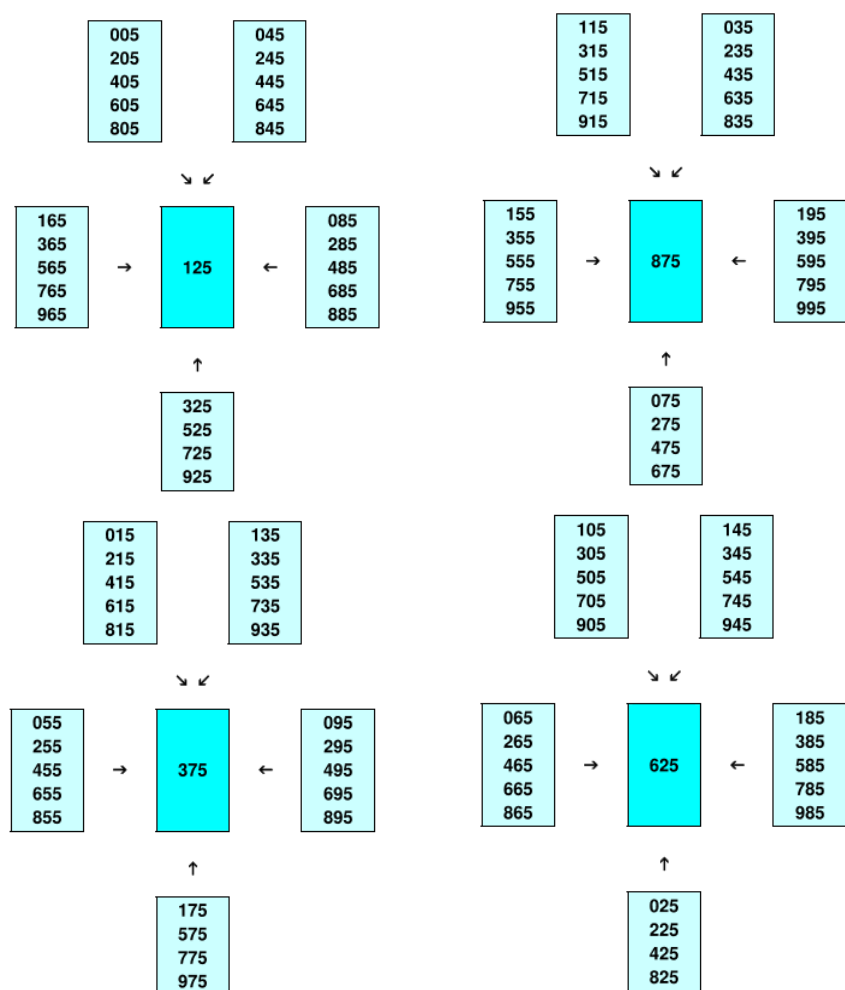


zu A 7.3:

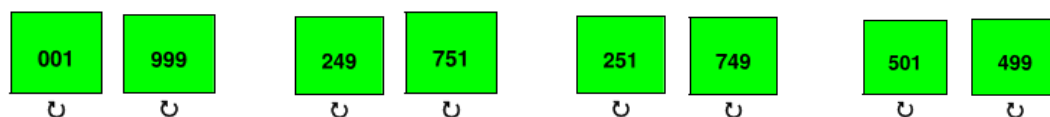


zu A 7.4

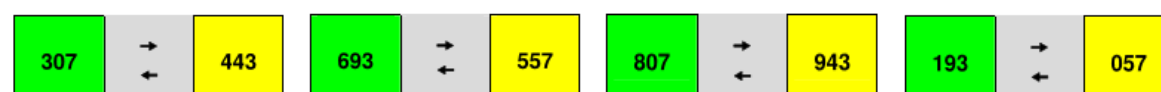
(1)



(2)



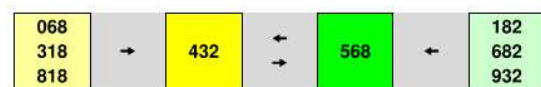
(3)



(4)



(5)

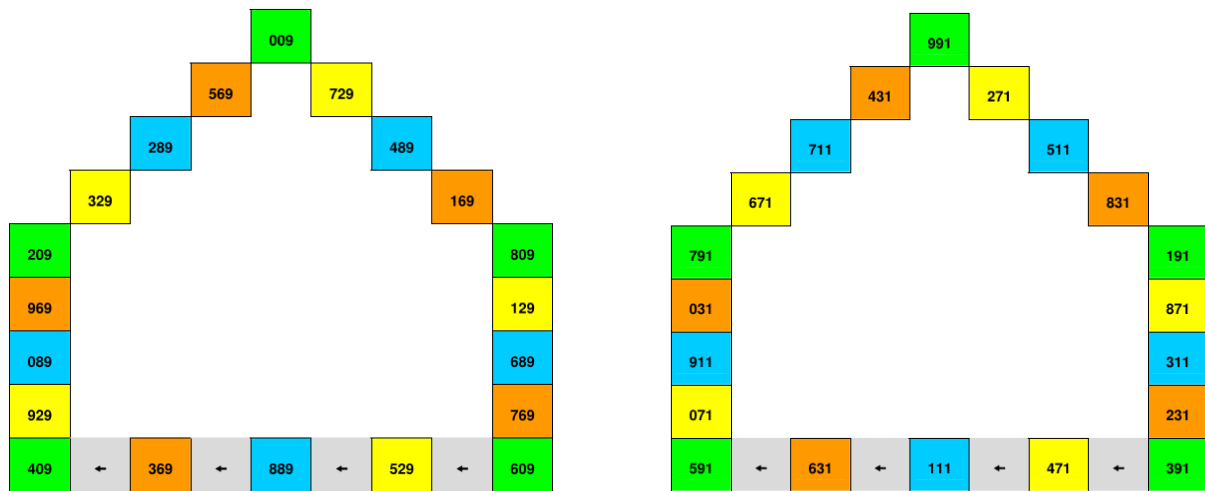
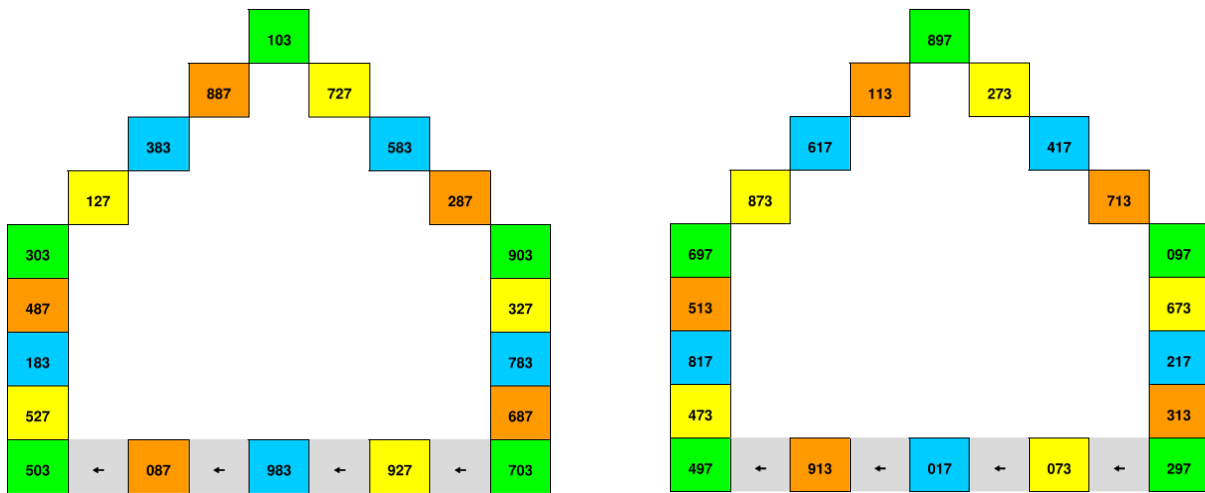
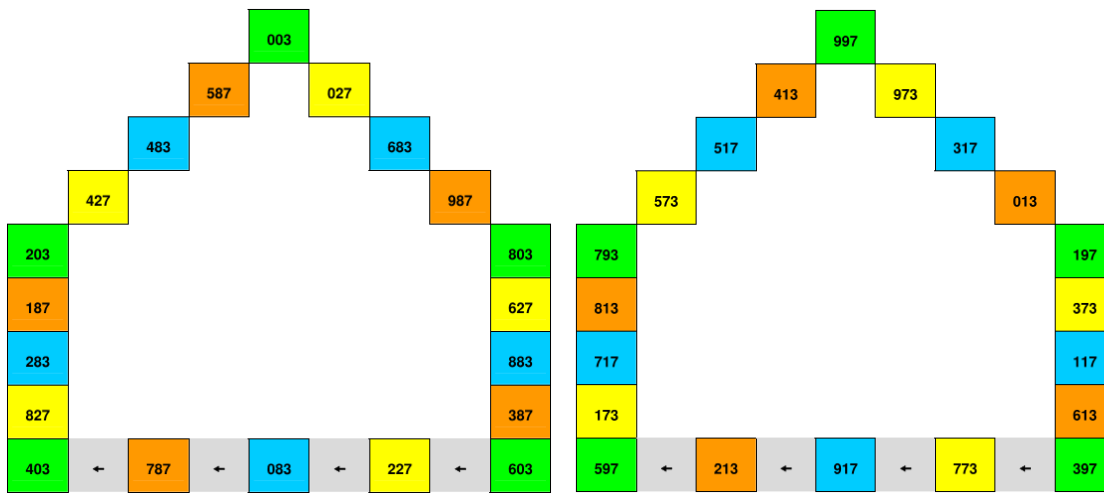


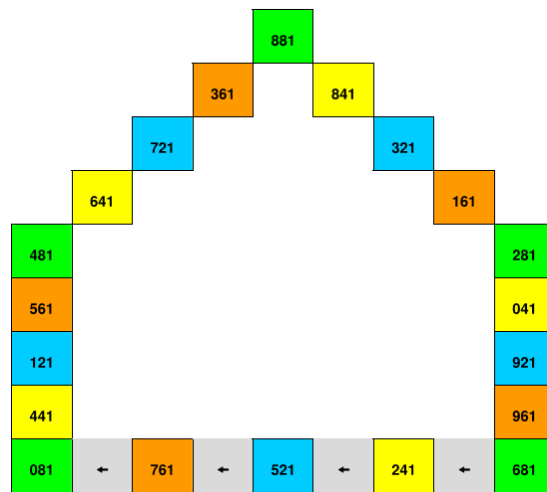
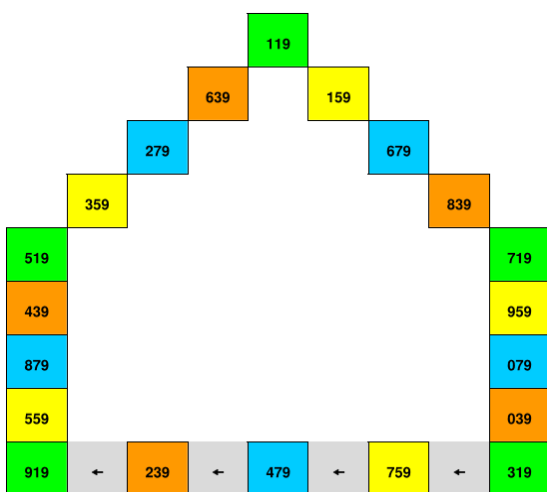
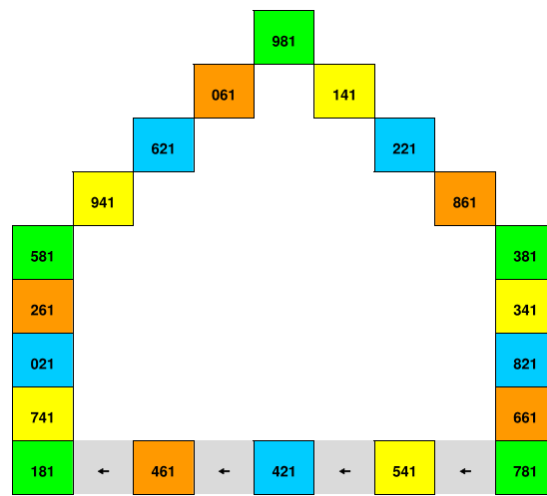
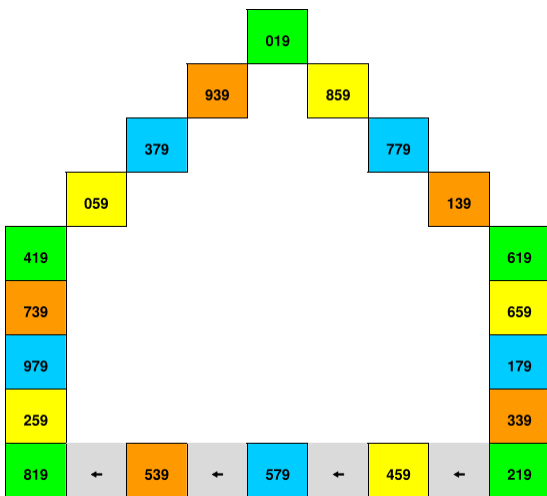
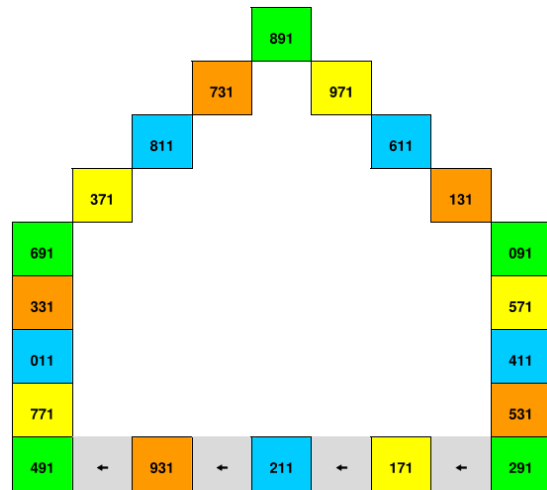
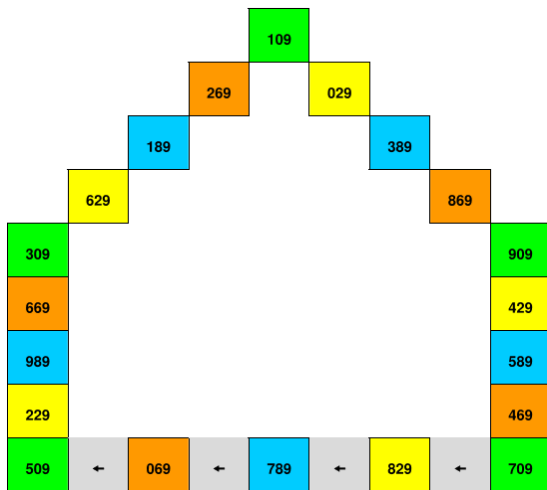
(6)

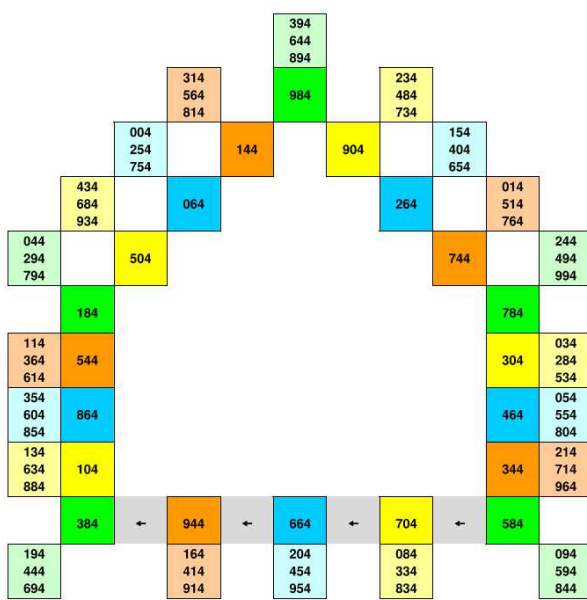
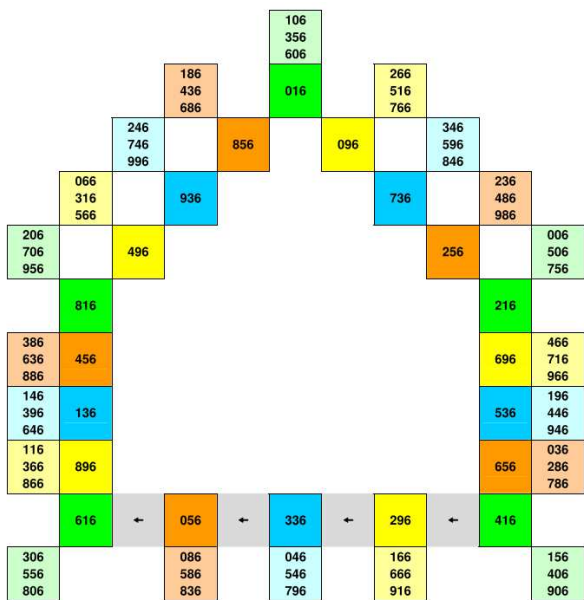
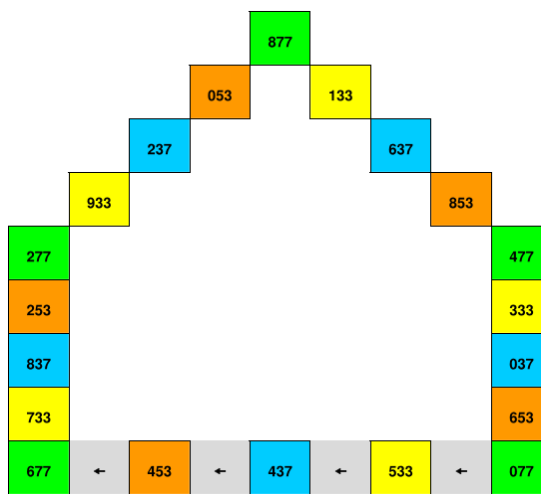
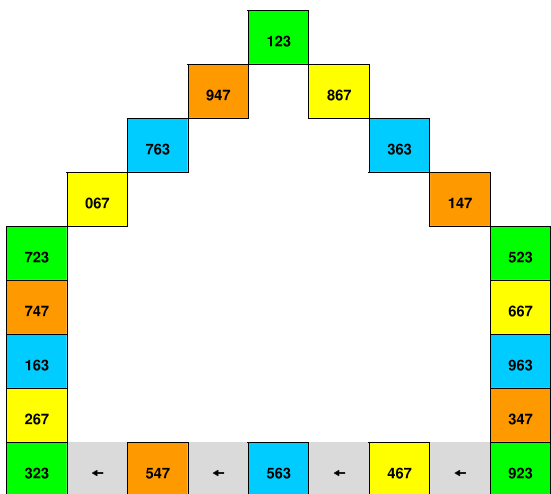
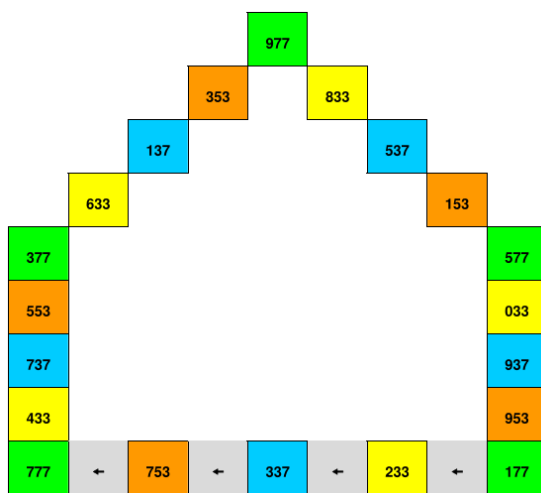
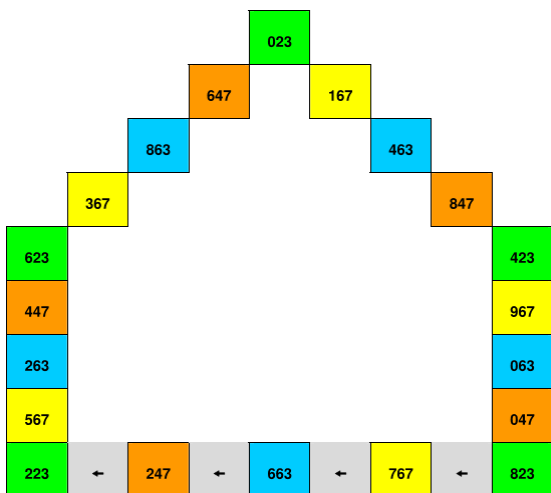
099 → 299	901 → 701	199 → 599	801 → 401
↑	↑	↑	↑
699 ← 899	301 ← 101	399 ← 799	601 ← 201
949 → 349	051 → 651	049 → 649	951 → 351
↑	↑	↑	↑
149 ← 549	851 ← 451	849 ← 449	151 ← 551
007 → 343	993 → 657	107 → 043	893 → 957
↑	↑	↑	↑
543 ← 607	457 ← 393	843 ← 507	157 ← 493
207 → 743	793 → 257	707 → 243	293 → 757
↑	↑	↑	↑
143 ← 407	857 ← 593	643 ← 907	357 ← 093

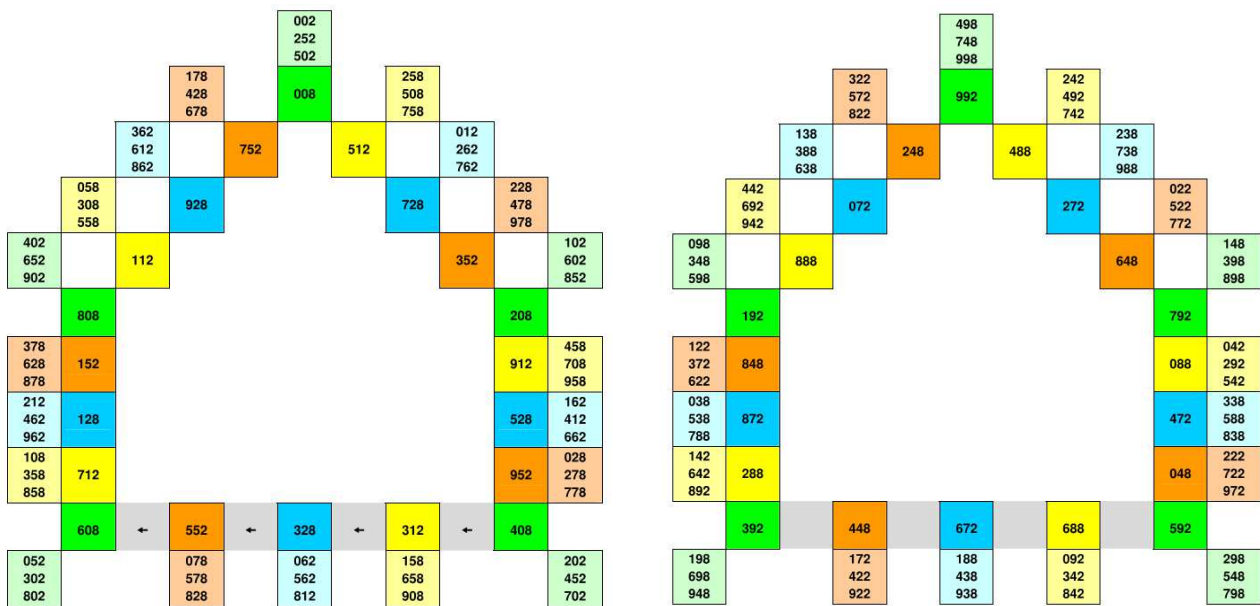
282 532 782				018 268 518
	768 → 832			
	↑		↓	
	032 ← 368			
118 618 868				082 332 582
174 674 924				274 524 774
	024 → 824			
	↑		↓	
	424 ← 224			
474 724 974				074 324 574

218 468 718				482 732 982
	232 → 168			
	↑		↓	
	968 ← 632			
132 382 882				418 668 918
076 326 826				226 476 726
	976 → 176			
	↑		↓	
	576 ← 776			
026 276 526				426 676 926



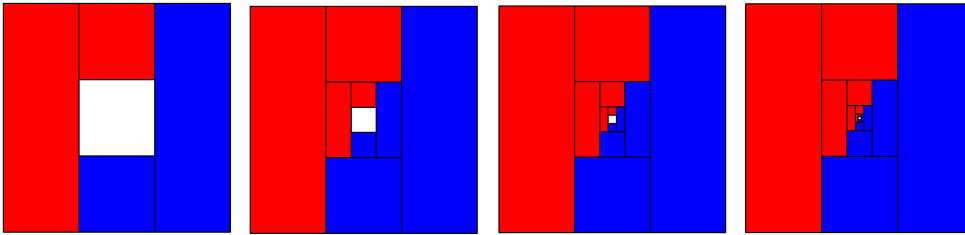






Kap. 8

zu A 8.1:



zu A 8.2:

Wenn die Dreiteilung des weißen Rechtecks durch vertikale Linien erfolgt, „wachsen“ die rot und blau gefärbten Bereiche kontinuierlich zusammen.

zu A 8.3:

Abb. links: Das Ausgangsquadrat wurde durch eine Diagonale halbiert und eine Hälfte grün gefärbt, dann das nicht gefärbte gleichschenkelig-rechtwinklige Dreieck durch die Symmetrieachse und eine Hälfte gelb gefärbt. In den folgenden Schritten wurde jeweils das nicht gefärbte Dreieck halbiert und jeweils eines der Dreiecke abwechselnd gelb und grün gefärbt. Insgesamt ist dann

$$A_{\text{grün}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots \quad \text{und} \quad A_{\text{gelb}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \dots \right) = \frac{1}{2} \cdot A_{\text{grün}}$$

Hieraus folgt, dass zwei Drittel der Quadratfläche grün gefärbt ist, ein Drittel gelb.

Abb. Mitte: Im ersten Schritt wird das Ausgangsquadrat durch die beiden Diagonalen in vier gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke unterteilt, von denen zwei Dreiecke grün gefärbt werden. Die beiden anderen Dreiecke werden jeweils durch die Symmetrieachsen halbiert, wovon eine Hälfte gelb gefärbt wird. usw. Hieraus folgt wie bei der 1. Abbildung, dass zwei Drittel der Quadratfläche grün gefärbt ist, ein Drittel gelb.

Abb. rechts: Wie bei der Abb. in der Mitte wird zunächst das Ausgangsquadrat durch die beiden Diagonalen in vier gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke unterteilt. Die Färbung erfolgt aber in beiden Hälften jeweils entgegengesetzt. Daher ist die Quadratfläche jeweils zur Hälfte grün bzw. gelb gefärbt.

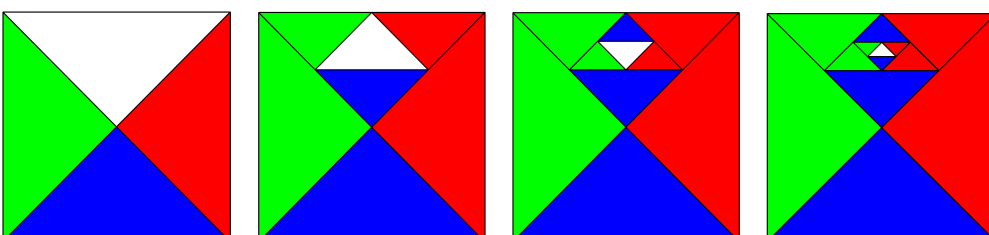
zu A 8.4:

Wird die Seitenlänge des Dreiecks mit a bezeichnet, dann gilt für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}.$$

$$A = 1 \text{ bedeutet daher: } a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \text{ also } a = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,52$$

zu A 8.5:



zu A 8.6:

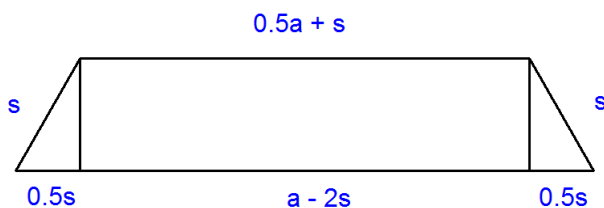
Da das äußere Dreieck 4-mal so groß sein soll wie das innere Dreieck, ist die Seitenlänge des inneren Dreiecks $\frac{1}{\sqrt{4}}$ -mal so groß, also $\frac{1}{2}$ -mal so groß wie die des äußeren Dreiecks. Man zeichnet also die drei äußeren symmetrischen Trapeze mit den parallelen Seiten der Länge a und $\frac{1}{2} \cdot a$ und einem Basiswinkel von 30° . Die schrägen Schenkel der äußeren Trapeze sind halb so lang wie der Abstand eines Eckpunkts vom Mittelpunkt des Dreiecks (dieser ist $\frac{2}{3}$ -mal so lang wie die Höhe im gleichseitigen Dreieck), d. h. bei den äußeren Trapezen ist dies $\frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{3}}$, bei den nächsten Trapezen entsprechend jeweils halb so lang wie bei den nächst-äußeren Trapezen.

zu A 8.7:

Ein gleichseitiges Dreieck wird so in vier gleich große Teilflächen zerlegt, dass außen drei kongruente Trapeze entstehen und innen wieder ein gleichseitiges Dreieck. Da das äußere Dreieck 4-mal so groß sein soll wie das innere Dreieck, ist die Seitenlänge des inneren Dreiecks $\frac{1}{\sqrt{4}}$ -mal so groß, also $\frac{1}{2}$ -mal so groß wie die des äußeren Dreiecks.

Ist a die Seitenlänge des Ausgangsdreiecks, dann haben die Trapeze im ersten Schritt Grundseiten mit der Länge $a - s$ (unten) und $\frac{1}{2} \cdot a + s$ (oben) sowie zwei Schenkel mit der Länge s . Da die Schenkel mit der unteren Grundseite einen Winkel von 60° bilden, gilt:

$\frac{1}{2} \cdot a + s = a - 2s$, also $s = 0,2 \cdot a$. Die untere Grundseite des Trapezes hat also die Länge $0,8 \cdot a$, die obere $0,7 \cdot a$, die Schenkel $0,2 \cdot a$.



zu A 8.8:

Im ersten Bild ist ein Quadrat zu sehen, das in fünf gleich große Flächen ausgeteilt ist. Wenn die Seitenlänge des Quadrats $a_1 = 1$ LE beträgt, ist der Flächeninhalt des Quadrats 1 FE.

Das in der Mitte der Figur liegende Quadrat hat dann eine Seitenlänge von $a_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,4472$.

Für die vier Rechtecke mit den Seitenlängen b_2 und c_2 gilt: $b_2 + c_2 = 1$ und $b_2 \cdot c_2 = 1/5$, also

$$b_2 = \frac{1}{5c_2} \text{ und damit } b_2 + c_2 = \frac{1}{5c_2} + c_2 = \frac{1+5c_2^2}{5c_2} = 1$$

Dies führt auf die quadratische Gleichung: $5c_2^2 - 5c_2 + 1 = 0$.

Diese hat zwei positive Lösungen, nämlich $c_2 \approx 0,2764$ bzw. $c_2 \approx 0,7236$.

Wegen $b_2 + c_2 = 1$ gilt dann entsprechend: $b_2 \approx 0,7236$ bzw. $b_2 \approx 0,2764$

Für die im Quadrat mit der Seitenlänge $a_2 = \sqrt{\frac{1}{5}} \approx 0,4472$ eingeschlossenen vier Rechtecke und das Quadrat

in der Mitte gilt dann: $a_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$ und für b_3 bzw. c_3 entsprechend:

$$c_3 \approx 0,2764 \cdot 0,4472 \approx 0,1236 \text{ und } b_3 \approx 0,7236 \cdot 0,4472 \approx 0,3236$$

Die Seitenlängen der nächsten Figur ergeben sich dann jeweils durch Multiplikation mit dem Faktor 0,4472. usw.

zu A 8.9:

Die untere Grundseite des Ausgangsquadrats wird im Verhältnis 2 : 1 : 2 unterteilt. Das linke und das rechte Rechteck werden jeweils in der Mitte halbiert und die so entstandenen vier gleichgroßen Rechtecke in vier Farben gefärbt.

Das nicht gefärbte mittlere Rechteck wird in der Höhe im Verhältnis 2 : 1 : 2 unterteilt. Das obere und das untere Rechteck werden jeweils in der Mitte längs geteilt und die so entstandenen vier gleichgroßen Rechtecke in vier Farben (wie ihre Nachbarrechtecke) gefärbt.

Die beiden Schritte werden für das übrig gebliebene, nicht gefärbte Quadrat in der Mitte wiederholt.

zu A 8.10:

Da das äußere Quadrat 5-mal so groß sein soll wie das innere Quadrat, ist die Seitenlänge des inneren Quadrats $\frac{1}{\sqrt{5}}$ -mal so groß wie die des äußeren Quadrats. Die Trapeze haben also Grundseiten der Längen a und $(ca.) 0,447 \cdot a$. Die Höhe der Trapeze muss die Bedingung $h + 0,447 \cdot a + h = a$ erfüllen, also $h \approx 0,276 \cdot a$. Hieraus folgt dass die Schenkel, die mit den beiden Grundseiten einen Winkel von 45° bzw. 135° bilden, eine Länge von $s = \sqrt{2} \cdot h \approx 0,391 \cdot a$ haben.

zu A 8.11:

Da das äußere Quadrat (mit Seitenlänge a) 5-mal so groß sein soll wie das innere Quadrat, ist die Seitenlänge des inneren Quadrats $\frac{1}{\sqrt{5}}$ -mal so groß wie die des äußeren Quadrats, also $ca. 0,447 \cdot a$.

Dieses innen liegende Quadrat hat Diagonalen, die $\sqrt{2}$ -mal so groß sind wie die Seite dieses Quadrats; sie haben also eine Länge von $ca. 0,632 \cdot a$.

Eine Unterteilung des Ausgangsquadrats kann daher wie folgt vorgenommen werden: Das Quadrat wird zunächst durch die beiden Mittellinien in vier gleich große Quadrate unterteilt. Von der Mitte der Figur aus trägt man auf den Mittellinien jeweils eine halbe Diagonalenlänge, also eine Strecke von $0,316 \cdot a$ ab.

Die in den Ecken des Ausgangsquadrats liegenden vier Fünfecke haben also zwei zueinander senkrecht stehende Seiten der Länge $0,5 \cdot a$, zwei dazu senkrecht stehende Seiten der Länge $0,5 \cdot a - 0,316 \cdot a = 0,184 \cdot a$ sowie die Grundseite des inneren Quadrats mit einer Länge von $0,447 \cdot a$.

Zusatz: Berechnung der Seitenlängen des regelmäßigen Fünfecks (2. Möglichkeit)

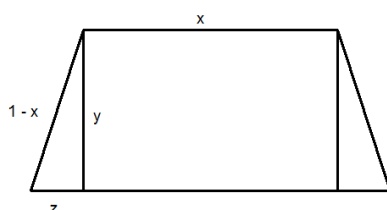
Da das äußere Quadrat 5-mal so groß sein soll wie das innere Quadrat, ist die Seitenlänge des inneren Quadrats $\frac{1}{\sqrt{5}}$ -mal so groß wie die des äußeren Quadrats.

Der Flächeninhalt eines regulären 5-Ecks mit Seitenlänge $a_1 = 1$ LE. berechnet sich wie folgt:

$$A_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot h_1 = \frac{5}{2} \cdot a_1 \cdot \frac{a_1}{2 \cdot \tan(36^\circ)} = \frac{5a_1^2}{4 \cdot \tan(36^\circ)}. \text{ Wegen } a_1 = 1 \text{ bedeutet dies: } A_1 \approx 1,7205 \text{ FE.}$$

Das innen liegende Fünfeck hat dann einen Flächeninhalt von $A_2 = \frac{5a_1^2}{24 \cdot \tan(36^\circ)}$

Dies ist auch der Flächeninhalt der fünf symmetrischen Trapeze. Diese Trapeze bestehen aus einem Rechteck mit den Seitenlängen x (= obere Seite des Trapezes) und y (=Höhe des Trapezes) und zwei rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten y und z ; die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks bildet zusammen mit der oberen Trapezseite eine Grundseite des Ausgangs-Fünfecks.



Der Flächeninhalt eines Trapezes ergibt sich daher wie folgt:

$$A_2 = x \cdot y + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot y = (x + z) \cdot y$$

Da $y = (1 - x) \cdot \sin(72^\circ)$ und $z = (1 - x) \cdot \cos(72^\circ)$ gilt weiter:

$$A_2 = [x + (1 - x) \cdot \cos(72^\circ)] \cdot (1 - x) \cdot \sin(72^\circ) = [x + \cos(72^\circ) - x \cdot \cos(72^\circ)] \cdot (1 - x) \cdot \sin(72^\circ)$$

Mit Rechnerhilfe muss dann die Gleichung

$$[x + \cos(72^\circ) - x \cdot \cos(72^\circ)] \cdot (1 - x) \cdot \sin(72^\circ) = \frac{5}{24 \cdot \tan(36^\circ)}$$

gelöst werden. Für x ergibt sich: $x \approx 0,5718$ und hieraus $y \approx 0,4072$ und $z \approx 0,1323$.

Die Seitenlängen der nächsten Figur ergeben sich dann jeweils durch Multiplikation mit dem Faktor

$$\sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0,4082 \cdot$$

zu A 8.12:

Obere Abbildungen: Da der Radius halbiert wird, nimmt die (jeweils) übrig bleibende gelb gefärbte Fläche ein Viertel der Gesamtfläche des Achtecks ein, d. h., für die hellblau gefärbte Fläche des 1. Schritts gilt:

$$A_1 = \frac{3}{4} \cdot A_{\text{Achteck}} \text{ und entsprechend weiter für das grün gefärbte Achteck, das drei Viertel der gelb gefärbten}$$

$$\text{Restfläche einnimmt: } A_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{3}{16} \cdot A_{\text{Achteck}} \cdot \text{Vor dem 3. Schritt ist ein Viertel von einem}$$

Viertel der Achteckfläche noch gelb gefärbt. Im 3. Schritt wird dann drei Viertel davon dunkelgrün gefärbt:

$$A_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{3}{64} \cdot A_{\text{Achteck}}$$

$$\text{Nacheinander wird dann } \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots = \frac{3}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1, \text{ also nach}$$

unendlich vielen Schritten die gesamte Fläche gefärbt.

Untere Abbildungen: Da der Radius gedrittelt wird, nimmt die (jeweils) übrig bleibende gelb gefärbte Fläche ein Drittel der Gesamtfläche des Achtecks ein, d. h., für die hellblau gefärbte Fläche des 1. Schritts gilt:

$$A_1 = \frac{2}{3} \cdot A_{\text{Achteck}} \text{ und entsprechend weiter für das violett gefärbte Achteck, das zwei Drittel der gelb}$$

$$\text{gefärbten Restfläche einnimmt: } A_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{2}{9} \cdot A_{\text{Achteck}} \cdot$$

Vor dem 3. Schritt ist ein Drittel von einem Drittel der Achteckfläche noch gelb gefärbt. Im 3. Schritt wird dann zwei Drittel davon pink gefärbt:

$$A_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Achteck}} = \frac{2}{27} \cdot A_{\text{Achteck}}$$

$$\text{Nacheinander wird dann } \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots = \frac{2}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1, \text{ also nach}$$

unendlich vielen Schritten die gesamte Fläche gefärbt.

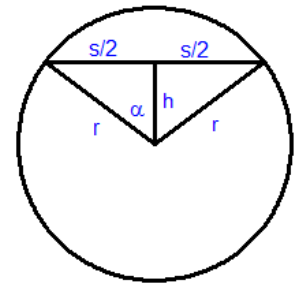
zu A 8.13:

- Dreiteilung des Kreises**

Der Flächeninhalt eines Kreisabschnitts berechnet sich aus der Differenz des Flächeninhalts des Kreissektors und des unter der Sehne liegenden gleichschenkligen Dreiecks. Wegen $\sin(\alpha) = s/2r$ und $\cos(\alpha) = h/r$ gilt:

$$A_{\text{Kreisabschnitt}} = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - r \cdot \sin(\alpha) \cdot r \cdot \cos(\alpha) = r^2 \cdot \left[\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) \right]$$



Da die drei gefärbten Teile des Kreises jeweils den Flächeninhalt $1/3 \cdot \pi \cdot r^2$ haben, ist die Gleichung

$$\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\pi}{3} \text{ zu lösen.}$$

Diese Gleichung hat die Lösung $\alpha \approx 74,64^\circ$. Hieraus folgt: $s \approx 1,929 \cdot r$ und $h \approx 0,265 \cdot r$. Wegen der Symmetrie der Figur gelten diese Maße auch für den unteren Kreisabschnitt.

Die drei Schichten haben daher die Höhen $0,735 \cdot r$ und $0,530 \cdot r$ und $0,735 \cdot r$.
(Kontrollrechnung: Die Summe beträgt $2r$.)

- Vierteilung des Kreises**

Der Kreis wird durch einen Durchmesser in zwei Hälften unterteilt. Hier muss analog zu oben die Gleichung

$$\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\pi}{4} \text{ gelöst werden. Hier ergibt sich } \alpha \approx 66,17^\circ \text{ und hieraus } s \approx 1,830 \cdot r \text{ und } h \approx 0,404 \cdot r.$$

Die vier Schichten haben daher die Höhen $0,596 \cdot r$ und $0,404 \cdot r$ und $0,404 \cdot r$ und $0,596 \cdot r$.

- Fünfteilung des Kreises**

Analog zu oben sind die Gleichungen

$$\pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\pi}{5} \text{ bzw. } \pi \cdot \frac{\alpha}{180^\circ} - \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{2\pi}{5}$$

zu lösen, um die Maße der obersten Schicht sowie die der beiden oberen Schichten zusammen zu ermitteln:

Aus $\alpha \approx 60,54^\circ$ folgt: $s \approx 1,74 \cdot r$ und $h \approx 0,492 \cdot r$. Und aus $\alpha \approx 80,92^\circ$ folgt: $s \approx 1,97 \cdot r$ und $h \approx 0,158 \cdot r$.

Daher haben die fünf Schichten des Kreises die Höhen:

$0,508 \cdot r$, $0,334 \cdot r$, $0,316 \cdot r$, $0,334 \cdot r$ und $0,508 \cdot r$.

- Unterteilung des regelmäßigen Fünfecks**

Ein regelmäßiges 5-Eck mit Seitenlänge a setzt sich aus fünf symmetrischen Dreiecken zusammen, die den Mittelpunkt des 5-Ecks gemeinsam haben. Die Höhen H dieser Dreiecke berechnen sich aus

$$\tan(36^\circ) = \frac{a}{2H} \Leftrightarrow H = \frac{a}{2 \cdot \tan(36^\circ)}, \text{ also berechnet sich der Flächeninhalt}$$

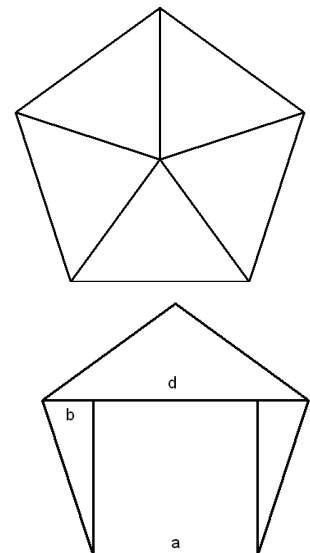
des regelmäßigen 5-Ecks wie folgt:

$$A_{5\text{-Eck}} = 5 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2 \cdot \tan(36^\circ)} = \frac{5}{4 \cdot \tan(36^\circ)} \cdot a^2 \approx 1,7205 \cdot a^2$$

Der untere Teil des 5-Ecks ist ein Trapez, das gebildet wird aus drei Seiten des 5-Ecks und einer Diagonale d .

Diese Diagonale d berechnet sich aus der folgenden Figur:

$$d = a + 2 \cdot b = a + 2 \cdot a \cdot \sin(18^\circ) = a \cdot (1 + 2 \cdot \sin(18^\circ)) \approx 1,618 \cdot a$$



– man könnte sie auch mithilfe von $d = 2a \cdot \sin(54^\circ)$ berechnen.

Die Höhe des Trapezes ist: $h = a \cdot \cos(18^\circ) \approx 0,951a$;

daher berechnet sich der Flächeninhalt des Trapezes wie folgt:

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a + d) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (a + a \cdot (1 + 2 \cdot \sin(18^\circ))) \cdot a \cdot \cos(18^\circ)$$

$$= a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot (1 + \sin(18^\circ)) \approx 1,2449 \cdot a^2$$

Das Trapez hat ungefähr 72,4 % der Gesamtfläche des regelmäßigen 5-Ecks; daher muss beispielsweise die Halbierungslinie des 5-Ecks unterhalb der Diagonalen liegen.

- **Halbierung des Fünfecks** (wird später benötigt)

Zeichnet man eine Parallele zur Diagonalen, dann entsteht ein Trapez, dessen Flächeninhalt sich wie folgt berechnet:

$$A_{\text{Teil}} = a \cdot y + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = a^2 \cdot k \cdot \cos(18^\circ) + a^2 \cdot k^2 \cdot \sin(18^\circ) \cdot \cos(18^\circ)$$

$$= a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ))$$

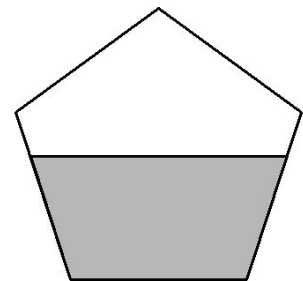
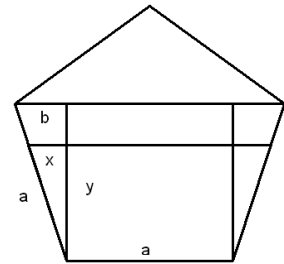
Dabei berechnen sich die auftretenden Strecken gemäß Strahlensatz wie folgt:

$$k = y : h = x : b$$

Gesucht ist dann derjenige Wert von k derart, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

Mithilfe beispielsweise eines Rechners findet man die Lösung: $k \approx 0,737$ und hiermit die Höhe des neuen Trapezes $y = k \cdot a \cdot \cos(18^\circ) \approx 0,701 \cdot a$



- **Dreiteilung des Fünfecks**

Um die untere Teilungslinie zu bestimmen, muss man entsprechend die Gleichung

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

lösen; als Lösung erhält man $k \approx 0,520$ und damit $y \approx 0,495 \cdot a$

Ebenso liegt noch die obere Teilungslinie unterhalb der Diagonalen

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

Als Lösung erhält man diesmal $k \approx 0,936$ und damit $y \approx 0,890 \cdot a$

- **Vierteilung des Fünfecks**

Um die untere Teilungslinie zu bestimmen, muss man entsprechend die Gleichung

$$a^2 \cdot \cos(18^\circ) \cdot k \cdot (1 + k \cdot \sin(18^\circ)) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4 \tan(36^\circ)} \cdot a^2$$

lösen; als Lösung erhält man $k \approx 0,402$ und damit $y \approx 0,383 \cdot a$.

Die zweite Teilungslinie von unten wurde als Halbierungslinie berechnet.

Die obere Teilungslinie liegt oberhalb zur Grundseite parallel liegenden Diagonale.

Das gleichschenklige Dreieck hat d als Grundseite und Schenkel der Seitenlänge a .

Der Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich aus den oben berechneten Flächeninhalten:

$$A_{\text{Dreieck}} = A_{\text{5-Eck}} - A_{\text{Trapez}} = 1,7205 \cdot a^2 - 1,2449 \cdot a^2 = 0,4756 \cdot a^2$$

Da die Diagonale die Länge $d \approx 1,618 \cdot a$ hat, ergibt sich aus dem Flächeninhalt eine Dreieckshöhe von $2 \cdot 0,4756/1,618 \approx 0,588 \cdot a$.

Da das obere Viertel des Fünfecks einen Flächeninhalt von $1,7205 \cdot a^2/4 \approx 0,4301 \cdot a^2$ hat, ist also ein Anteil von $0,4301/0,4756 \approx 0,9043$ der oberhalb der Diagonale liegenden Fläche gelb gefärbt. Da das gelb gefärbte Dreieck ähnlich ist zum Dreieck oberhalb der Diagonale erhält man für die Grundlinie des gelb gefärbten Dreiecks eine Länge von $\sqrt{0,9043} \cdot 1,618 \cdot a \approx 1,539 \cdot a$ und für die Höhe eine Länge $\sqrt{0,9043} \cdot 0,588 \cdot a \approx 0,559 \cdot a$.

Unterteilung des regelmäßigen Sechsecks

Ein regelmäßiges Sechseck mit Seitenlänge s setzt sich aus sechs gleichseitigen Dreiecken zusammen. Um das 6-Eck in drei gleich große Streifen zu unterteilen, muss ein Rechteck in der Mitte gezeichnet werden, dessen Breite b gerade zweimal die Höhe der Teildreiecke des 6-Ecks und dessen Flächeninhalt A gleich einem Drittel des Flächeninhalts des regelmäßigen 6-Ecks ist:

$$b = \frac{s}{\tan(30^\circ)} \quad \text{und} \quad A = \frac{A_6}{3} = \frac{s^2}{2 \cdot \tan(30^\circ)}.$$

Die Höhe x des mittleren Rechtecks ist daher gleich $x = \frac{A}{b} = \frac{s^2}{2 \cdot \tan(30^\circ)} \cdot \frac{\tan(30^\circ)}{s} = \frac{s}{2}$

Um ein regelmäßiges 6-Eck in vier gleich große Streifen zu unterteilen, muss man ein Rechteck in der Mitte zeichnen, dessen Breite b gerade zweimal die Höhe der o. a. Teildreiecke des 6-Ecks und dessen Flächeninhalt A gleich einem Viertel des Flächeninhalts des regelmäßigen 6-Ecks ist:

$$b = \frac{s}{\tan(30^\circ)} \quad \text{und} \quad A = \frac{A_6}{4} = \frac{3 \cdot s^2}{8 \cdot \tan(30^\circ)}.$$

Die Höhe x des mittleren Rechtecks ist daher gleich

$$x = \frac{A}{b} = \frac{3 \cdot s^2}{8 \cdot \tan(30^\circ)} \cdot \frac{\tan(30^\circ)}{s} = \frac{3}{8} \cdot s$$

Entsprechend verfährt man einer größeren Anzahl von Streifen:

Bei 5 Streifen ergibt sich analog:

$$x = \frac{A}{b} = \frac{3 \cdot s^2}{10 \cdot \tan(30^\circ)} \cdot \frac{\tan(30^\circ)}{s} = \frac{3}{10} \cdot s \quad (\text{in das mittlere Feld passen also drei Streifen}).$$

Kap. 9

Die folgende Tabelle enthält für alle natürlichen Zahlen zwischen 1 und 121 die Darstellung im 3er-System und im balancierten 3er-System. Für die in der Tabelle grün unterlegten natürlichen Zahlen ist kein Ausgleich auf der anderen Waagschale erforderlich. Die Anzahl der für das Auswiegen benötigten Gewichtsstücke kann man der Spalte rechts entnehmen. Bei 5 der 121 betrachteten Körper-Gewichte kommt man mit 1 Gewichtsstück aus, bei 20 mit 2 Gewichtsstücken, bei je 40 mit 3 bzw. mit 4 Gewichtsstücken und bei 16 Körper-Gewichten benötigt man alle 5 Gewichte.

Zahl im 10er-System	Zahl im 3er-System					Zahl im balancierten 3er-System					Anzahl der benötigten Gewichtsstücke
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	2	0	0	0	1	-1	2
3	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1
4	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	2
5	0	0	0	1	2	0	0	1	-1	-1	3
6	0	0	0	2	0	0	0	1	-1	0	2
7	0	0	0	2	1	0	0	1	-1	1	3
8	0	0	0	2	2	0	0	1	0	-1	2
9	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
10	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	2
11	0	0	1	0	2	0	0	1	1	-1	3
12	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	2
13	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	3
14	0	0	1	1	2	0	1	-1	-1	-1	4
15	0	0	1	2	0	0	1	-1	-1	0	3
16	0	0	1	2	1	0	1	-1	-1	1	4
17	0	0	1	2	2	0	1	-1	0	-1	3
18	0	0	2	0	0	0	1	-1	0	0	2
19	0	0	2	0	1	0	1	-1	0	1	3
20	0	0	2	0	2	0	1	-1	1	-1	4
21	0	0	2	1	0	0	1	-1	1	0	3
22	0	0	2	1	1	0	1	-1	1	1	4
23	0	0	2	1	2	0	1	0	-1	-1	3
24	0	0	2	2	0	0	1	0	-1	0	2
25	0	0	2	2	1	0	1	0	-1	1	3
26	0	0	2	2	2	0	1	0	0	-1	2
27	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1
28	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	2
29	0	1	0	0	2	0	1	0	1	-1	3
30	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	2
31	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	3
32	0	1	0	1	2	0	1	1	-1	-1	4
33	0	1	0	2	0	0	1	1	-1	0	3
34	0	1	0	2	1	0	1	1	-1	1	4
35	0	1	0	2	2	0	1	1	0	-1	3

36	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	2
37	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	3
38	0	1	1	0	2	0	1	1	1	-1	4
39	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	3
40	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	4
41	0	1	1	1	2	1	-1	-1	-1	-1	5
42	0	1	1	2	0	1	-1	-1	-1	0	4
43	0	1	1	2	1	1	-1	-1	-1	1	5
44	0	1	1	2	2	1	-1	-1	0	-1	4
45	0	1	2	0	0	1	-1	-1	0	0	3
46	0	1	2	0	1	1	-1	-1	0	1	4
47	0	1	2	0	2	1	-1	-1	1	-1	5
48	0	1	2	1	0	1	-1	-1	1	0	4
49	0	1	2	1	1	1	-1	-1	1	1	5
50	0	1	2	1	2	1	-1	0	-1	-1	4
51	0	1	2	2	0	1	-1	0	-1	0	3
52	0	1	2	2	1	1	-1	0	-1	1	4
53	0	1	2	2	2	1	-1	0	0	-1	3
54	0	2	0	0	0	1	-1	0	0	0	2
55	0	2	0	0	1	1	-1	0	0	1	3
56	0	2	0	0	2	1	-1	0	1	-1	4
57	0	2	0	1	0	1	-1	0	1	0	3
58	0	2	0	1	1	1	-1	0	1	1	4
59	0	2	0	1	2	1	-1	1	-1	-1	5
60	0	2	0	2	0	1	-1	1	-1	0	4
61	0	2	0	2	1	1	-1	1	-1	1	5
62	0	2	0	2	2	1	-1	1	0	-1	4
63	0	2	1	0	0	1	-1	1	0	0	3
64	0	2	1	0	1	1	-1	1	0	1	4
65	0	2	1	0	2	1	-1	1	1	-1	5
66	0	2	1	1	0	1	-1	1	1	0	4
67	0	2	1	1	1	1	-1	1	1	1	5
68	0	2	1	1	2	1	0	-1	-1	-1	4
69	0	2	1	2	0	1	0	-1	-1	0	3
70	0	2	1	2	1	1	0	-1	-1	1	4
71	0	2	1	2	2	1	0	-1	0	-1	3
72	0	2	2	0	0	1	0	-1	0	0	2
73	0	2	2	0	1	1	0	-1	0	1	3
74	0	2	2	0	2	1	0	-1	1	-1	4
75	0	2	2	1	0	1	0	-1	1	0	3
76	0	2	2	1	1	1	0	-1	1	1	4
77	0	2	2	1	2	1	0	0	-1	-1	3
78	0	2	2	2	0	1	0	0	-1	0	2
79	0	2	2	2	1	1	0	0	-1	1	3

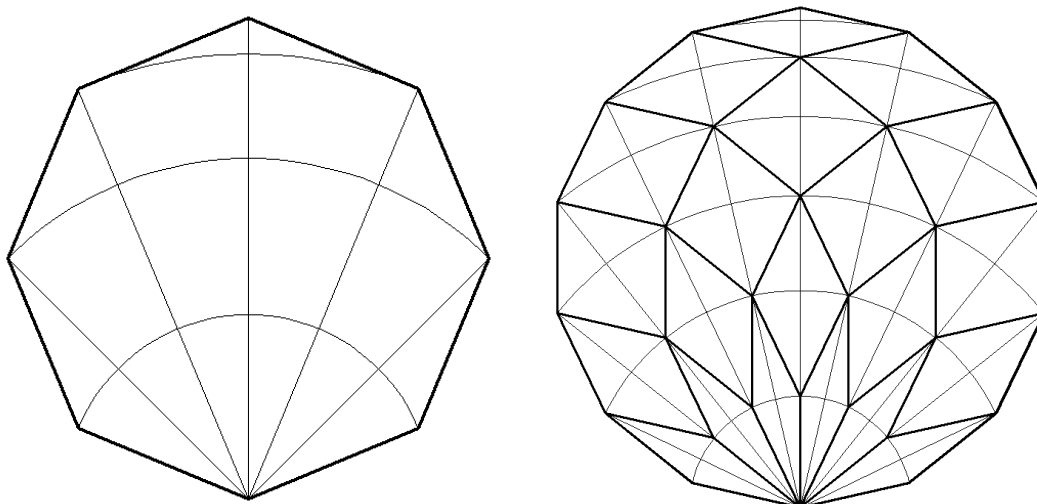
80	0	2	2	2	2	1	0	0	0	-1	2
81	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
82	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	2
83	1	0	0	0	2	1	0	0	1	-1	3
84	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	2
85	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	3
86	1	0	0	1	2	1	0	1	-1	-1	4
87	1	0	0	2	0	1	0	1	-1	0	3
88	1	0	0	2	1	1	0	1	-1	1	4
89	1	0	0	2	2	1	0	1	0	-1	3
90	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	2
91	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	3
92	1	0	1	0	2	1	0	1	1	-1	4
93	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	3
94	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	4
95	1	0	1	1	2	1	1	-1	-1	-1	5
96	1	0	1	2	0	1	1	-1	-1	0	4
97	1	0	1	2	1	1	1	-1	-1	1	5
98	1	0	1	2	2	1	1	-1	0	-1	4
99	1	0	2	0	0	1	1	-1	0	0	3
100	1	0	2	0	1	1	1	-1	0	1	4
101	1	0	2	0	2	1	1	-1	1	-1	5
102	1	0	2	1	0	1	1	-1	1	0	4
103	1	0	2	1	1	1	1	-1	1	1	5
104	1	0	2	1	2	1	1	0	-1	-1	4
105	1	0	2	2	0	1	1	0	-1	0	3
106	1	0	2	2	1	1	1	0	-1	1	4
107	1	0	2	2	2	1	1	0	0	-1	3
108	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	2
109	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	3
110	1	1	0	0	2	1	1	0	1	-1	4
111	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	3
112	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	4
113	1	1	0	1	2	1	1	1	-1	-1	5
114	1	1	0	2	0	1	1	1	-1	0	4
115	1	1	0	2	1	1	1	1	-1	1	5
116	1	1	0	2	2	1	1	1	0	-1	4
117	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	3
118	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	4
119	1	1	1	0	2	1	1	1	1	-1	5
120	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	4
121	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5

Kap. 10

zu A 10.1:

Die Beschreibung kann so erfolgen, wie in Abschnitt 10.3 allgemein ausgeführt. Der Winkel α hängt dabei vom jeweiligen n ab.

zu A 10.2:



zu A 10.3:

Man erhält die Auslegungen von wieder Typ 1 bzw. Typ 4 bzw. Typ 2 bzw. Typ 5.

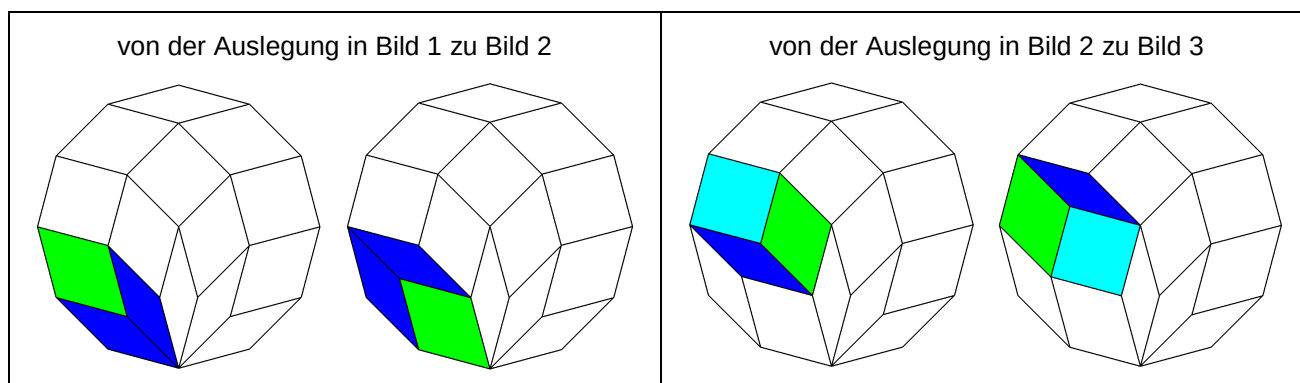
zu A 10.4:

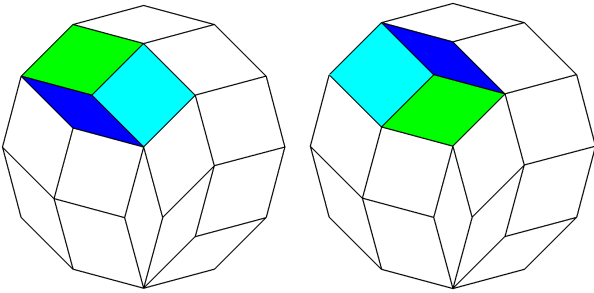
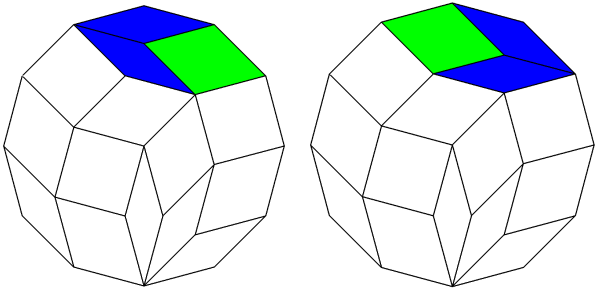
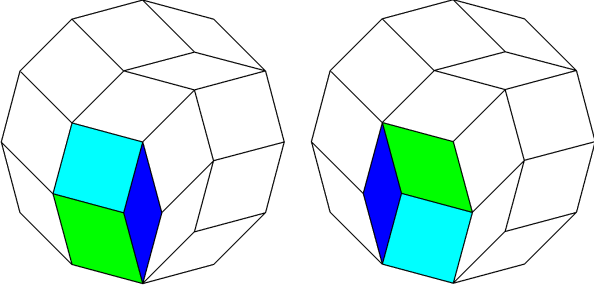
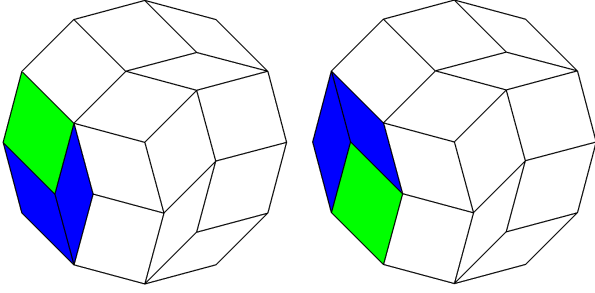
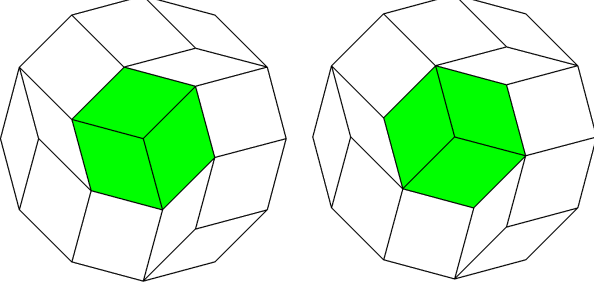
Für die Auslegung des regelmäßigen 6-Ecks werden drei Rauten vom selben Typ verwendet; es gibt keine symmetrische Teilfläche (außer der Fläche selbst), die gedreht werden könnte.

Zwar hat das regelmäßige 8-Eck symmetrische Teilflächen, die gedreht werden können, jedoch ist die nach der Drehung entstehende Figur identisch mit der Ausgangsfigur.

zu A 10.5:

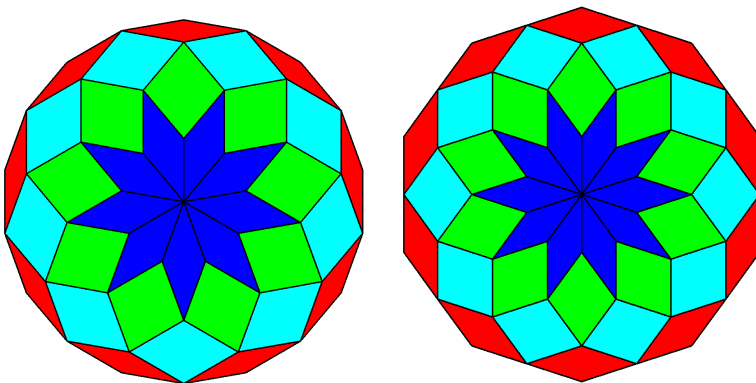
In den folgenden Abbildungen ist jeweils farbig hervorgehoben, welche Bereiche gedreht werden:



von der Auslegung in Bild 3 zu Bild 4 	von der Auslegung in Bild 4 zu Bild 5 
von der Auslegung in Bild 5 zu Bild 6 	von der Auslegung in Bild 6 zu Bild 7 
von der Auslegung in Bild 7 zu Bild 8 	

zu A 10.6:

Legt man von der Mitte aus die Rauten mit spitzem Winkel $180^\circ/9 = 20^\circ$ bzw. $180^\circ/10 = 18^\circ$, dann gelingt die zentralsymmetrische Auslegung einer Figur: Im ersten Fall handelt es sich um ein regelmäßiges 18-Eck, im zweiten Fall allerdings um ein regelmäßiges 10-Eck.



zu A 10.7:

Die Auslegung beginnt jeweils mit n Rauten ($n = 5, 6, 7, 8$) mit den spitzen Winkeln $360^\circ/n$. An diese n Rauten legt man dann jeweils zwei Rauten des gleichen Typs (also insgesamt $2n$ Rauten) und in die Lücke zwischen zwei Rauten passt dann noch einmal jeweils eine Rauten des gleichen Typs. Insgesamt werden also $4n$ Rauten mit spitzem Winkel $360^\circ/n$ benötigt.

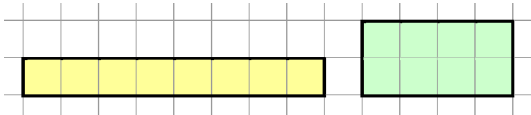
Kap. 11

zu A 11.1:

Zum Flächeninhalt $A = 8$ (FE) gibt es

ein Rechteck mit $u = 8 + 1 + 8 + 1 = 2 \cdot (8 + 1) = 18$ (LE) und

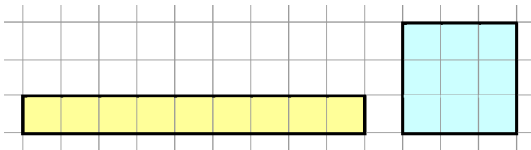
ein Rechteck mit $u = 4 + 2 + 4 + 2 = 2 \cdot (4 + 2) = 12$ (LE).



Zum Flächeninhalt $A = 9$ (FE) gibt es

ein Rechteck mit $u = 9 + 1 + 9 + 1 = 2 \cdot (9 + 1) = 20$ (LE) und

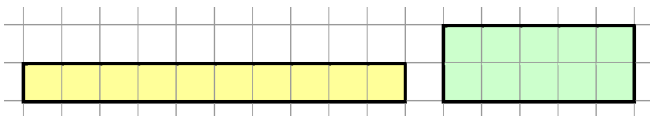
ein Rechteck mit $u = 3 + 3 + 3 + 3 = 2 \cdot (3 + 3) = 12$ (LE).



Zum Flächeninhalt $A = 10$ (FE) gibt es

ein Rechteck mit $u = 10 + 1 + 10 + 1 = 2 \cdot (10 + 1) = 22$ (LE) und

ein Rechteck mit $u = 5 + 2 + 5 + 2 = 2 \cdot (5 + 2) = 14$ (LE).



zu A 11.2:

6 hat die Teiler-Paare (1 ; 6) und (2 ; 3) mit den Umfängen 14 LE und 10 LE,

8 hat die Teiler-Paare (1 ; 8) und (2 ; 4) mit den Umfängen 18 LE und 12 LE,

9 hat die Teiler-Paare (1 ; 9) und (3 ; 3) mit den Umfängen 20 Le und 12 LE,

10 hat die Teiler-Paare (1 ; 10) und (2 ; 5) mit den Umfängen 22 LE und 14 LE.

zu A 11.3:

Da es hier um die *zusätzlichen* Teilerpaare geht, müssen die Einschränkungen notiert werden, da die anderen Fälle bereits erfasst sind.

zu A 11.4:

In der Grafik sind die jeweils möglichen Rechtecke repräsentiert, die zu einem bestimmten Umfang gehören; jeweils durch ein Quadratsymbol hervorgehoben sind die Rechtecke mit maximalem Flächeninhalt, die zu den durch 4 teilbaren Rechteckumfängen gehören, also zu einem Quadrat gehören.

zu A 11.5:

Die $a \cdot b$ Kästchen können bei einem $a \times b$ -Rechteck durch Wegnehmen von höchstens $(a - 1) \cdot (b - 1)$ Eckquadrat-Kästchen vermindert werden. Dies kann man sich am besten an der L-förmigen Figur verdeutlichen, die nur aus der ersten Spalte und der untersten Zeile des Ausgangsrechtecks besteht, oder an der Kreuzform, bei der die Figur aus $a + b - 1$ Kästchen besteht ($= a \cdot b - (a - 1) \cdot (b - 1) = a + b - 1$).

zu A 11.6:

An den folgenden Beispielen kann man ablesen:

Ist die Breite a eine ungerade Zahl, dann kann man maximal $\frac{1}{2} \cdot (a - 1)$ senkrechte „Einschnitte“ vornehmen (im Bild jeweils von oben nach unten eingezeichnet), die jeweils die Höhe $b - 1$ haben (mit Zuwachs des Umfangs um 2 LE pro Kästchen), d. h., der Umfang wächst

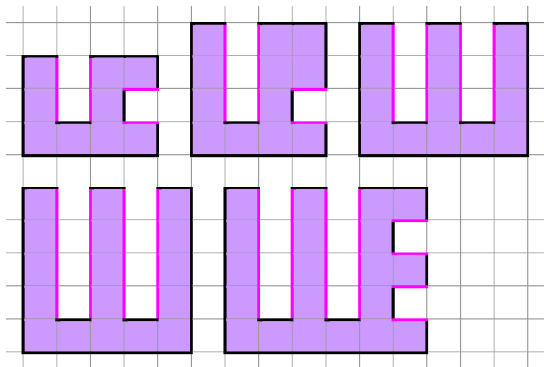
- bei **ungeradem** a um insgesamt um $(a - 1) \cdot (b - 1) = a \cdot b - a - b + 1$ LE.

Ist die Breite a eine **gerade** Zahl, dann kann man maximal $\frac{1}{2} \cdot a - 1$ senkrechte „Einschnitte“ vornehmen (im Bild jeweils von oben nach unten eingezeichnet), die jeweils die Höhe $b - 1$ haben (mit Zuwachs des Umfangs um 2 LE pro Kästchen), also zusammen $(a - 2) \cdot (b - 1)$,

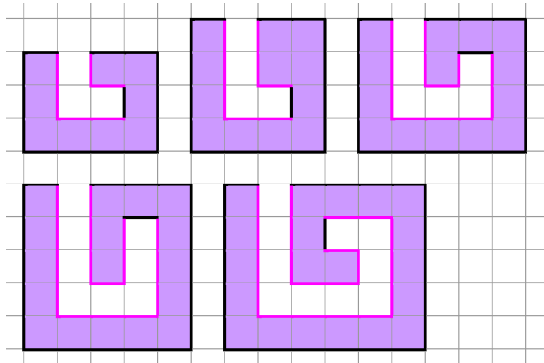
zusätzlich (in den Abbildungen rechts eingezeichnet) einzelne „Einschnitte“ von je *einem* Kästchen, und zwar bei geradem b um $\frac{1}{2} \cdot b - 1$ Kästchen mit dem Zuwachs $b - 2$ LE, bei ungeradem b um $\frac{1}{2} \cdot (b - 1)$ Kästchen mit dem Zuwachs $b - 1$ LE, d. h., der Umfang wächst

- bei **geradem** b insgesamt um $(a - 2) \cdot (b - 1) + (b - 2) = a \cdot b - a - b = (a - 1) \cdot (b - 1) - 1$ LE,
- bei **ungeradem** b um insgesamt um $(a - 2) \cdot (b - 1) + (b - 1) = (a - 1) \cdot (b - 1) = a \cdot b - a - b + 1$ LE.

Allgemein kann also der Umfang *maximal* um $(a - 1) \cdot (b - 1)$ LE wachsen, im Falle, dass a und b gerade sind um 1 LE weniger.



Alternativ zu den „Einschnitten“ kann man auch überlegen, welche „spiralartigen“ Einschnitte möglich sind.

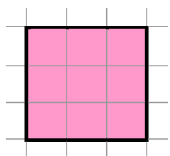


zu A 11.7:

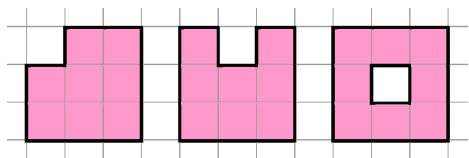
Innere Quadrate können nur eingezeichnet werden, wenn Breite a und Höhe b jeweils mindestens 3 LE betragen. Das dann jeweils maximal mögliche innere Quadrat hat den Flächeninhalt $(a - 2) \cdot (b - 2)$ FE und den Umfang $2 \cdot (a + b - 4)$ LE.

zu A 11.8:

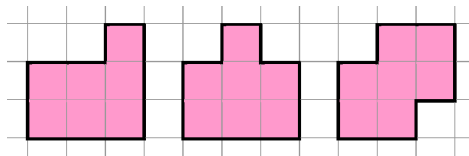
$A = 9$ FE, $u = 12$ LE



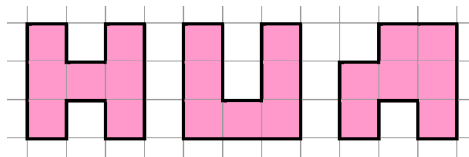
$A = 8$ FE und (von links nach rechts) $u = 12$ LE, $u = 14$ LE, $u = 16$ LE



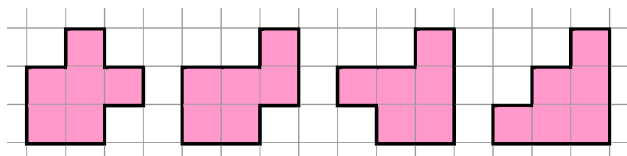
$A = 7$ FE und $u = 12$ LE



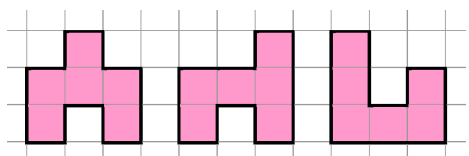
$A = 7$ FE und (von links nach rechts) $u = 16$ LE, $u = 16$ LE, $u = 14$ LE



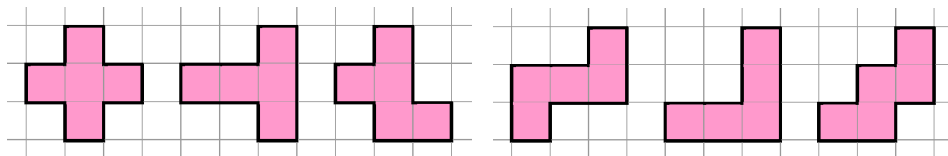
$A = 6$ FE und $u = 12$ LE



$A = 6$ FE und $u = 14$ LE

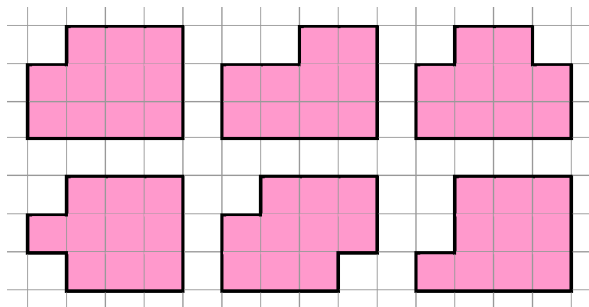


$A = 5$ FE und $u = 12$ LE

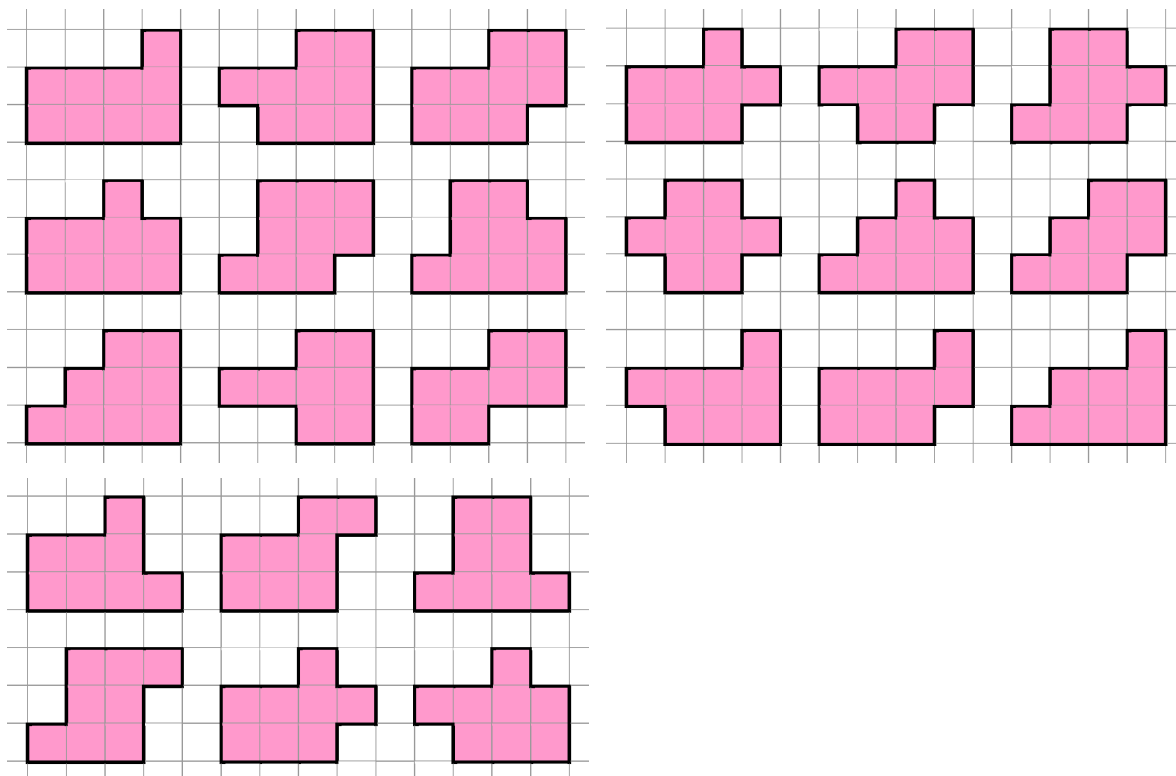


zu A 11.9:

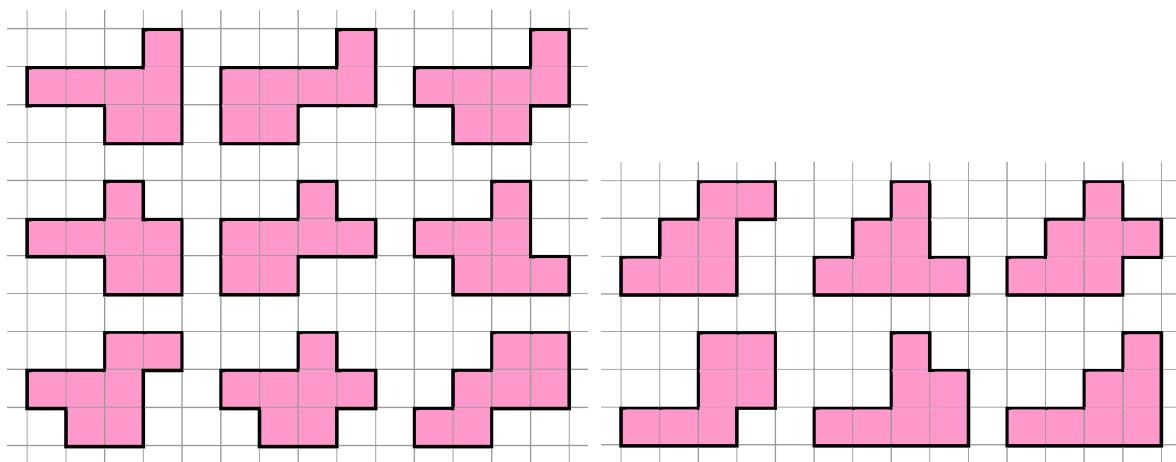
Figuren mit Umfang $u = 14$ LE und Flächeninhalt $A = 11$ FE bzw. 10 FE



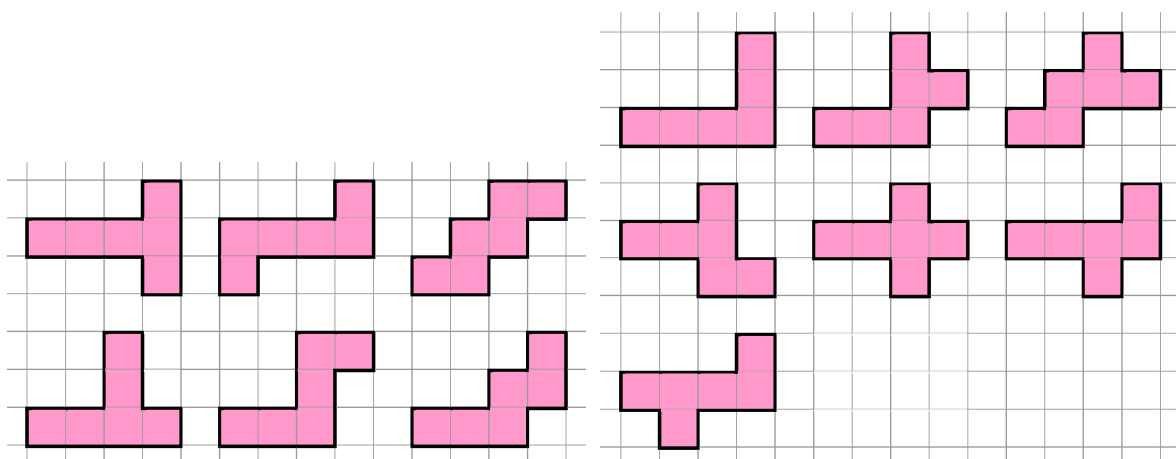
Figuren mit Umfang $u = 14$ LE und Flächeninhalt $A = 9$ FE bzw. 8 FE



Figuren mit Umfang $u = 14$ LE und Flächeninhalt $A = 7$ FE



Figuren mit Umfang $u = 14$ LE und Flächeninhalt $A = 6$ FE



Figuren mit Flächeninhalt $A = 11$ FE bzw. $A = 10$ FE

	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 18$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE
	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE

Figuren mit Flächeninhalt $A = 9$ FE bzw. $A = 8$ FE

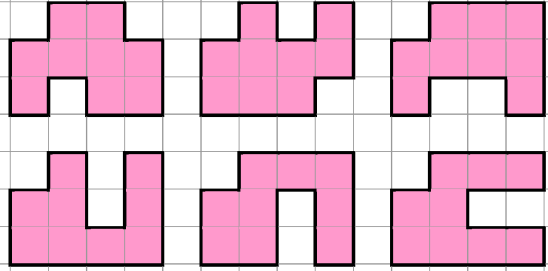
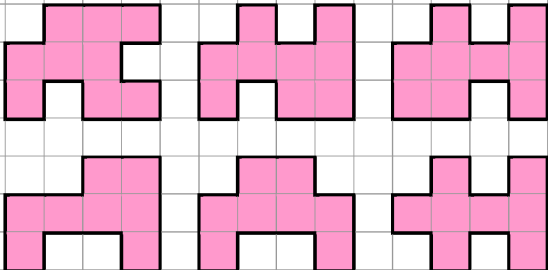
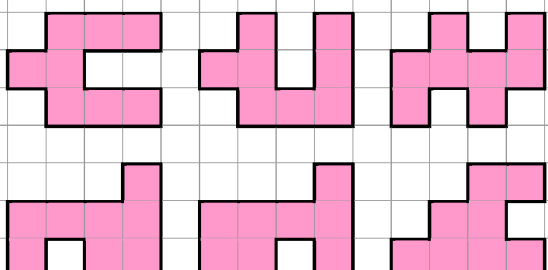
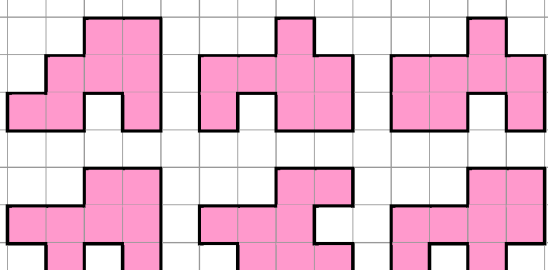
	$u = 18$ LE	$u = 20$ LE	$u = 20$ LE
	$u = 20$ LE	$u = 20$ LE	$u = 20$ LE
	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE	

Figuren mit Flächeninhalt $A = 10$ FE bzw. $A = 9$ FE

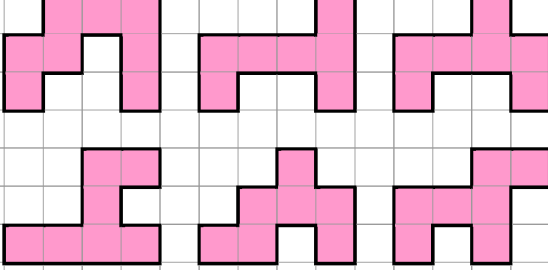
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE

	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE

Figuren mit Flächeninhalt $A = 9$ FE bzw. $A = 8$ FE

	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE
	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE
	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 18$ LE
	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE

Figuren mit Umfang Flächeninhalt $A = 8$ FE bzw. $A = 7$ FE

	$u = 18$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE	$u = 16$ LE

Figuren mit Flächeninhalt $A = 10$ FE bzw. $A = 9$ FE

	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE
	$u = 18$ LE	$u = 20$ LE	$u = 20$ LE
	$u = 16$ LE	$u = 18$ LE	$u = 18$ LE

zu A 11.10:

Dargestellt sind Quadrate mit den Flächeninhalten

$$A = 2^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 2 = 2; \quad A = 3^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 4 = 5; \quad A = 4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 6 = 10;$$

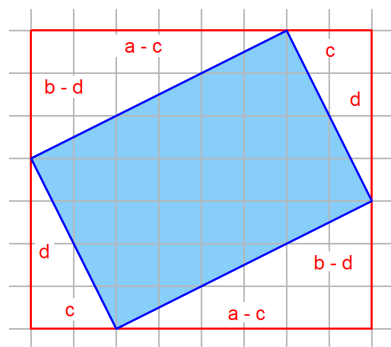
$$A = 5^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 12 = 13; \quad A = 5^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 25 - 8 = 17$$

Man erhält sie, indem man von den Ausgangsquadraten mit der Seitenlänge a an den vier Ecken rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen b und $a - b$ gleichartig abschneidet. Für den Flächeninhalt ergibt sich dann: $A = a^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot (a - b) = a^2 - 2ab + 2b^2$, dabei gilt $0 < b \leq a - b < a$

a	b	$a - b$	A
2	1	1	2
3	1	2	5
4	1	3	10
4	2	2	$8 = \frac{1}{2} \cdot a$
5	1	4	17
5	2	3	$13 = \frac{1}{2} \cdot (a + 1)$
6	1	5	26
6	2	4	20
6	3	3	$18 = \frac{1}{2} \cdot a$
7	1	6	37
7	2	5	29
7	3	4	$25 = \frac{1}{2} \cdot (a + 1)$

a	b	$a - b$	A
8	1	7	50
8	2	6	40
8	3	5	34
8	4	4	$32 = \frac{1}{2} \cdot a$
9	1	8	65
9	2	7	53
9	3	6	45
9	4	5	$41 \frac{1}{2} \cdot (a + 1)$
10	1	9	82
10	2	8	68
10	3	7	58
10	4	6	52
10	5	5	$50 = \frac{1}{2} \cdot a$

zu A 11.11:



Man erhält die inneren Rechtecke, indem man von den Ausgangsrechtecken mit den Seitenlängen a und b an je zwei einander gegenüberliegenden Ecken rechtwinklige Dreiecke mit den Seitenlängen c und d bzw. $a - c$ und $b - d$ gleichartig abschneidet. Für den Flächeninhalt ergibt sich dann:

$$A = a \cdot b - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot d - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (a - c) \cdot (b - d) = ad + bc - 2cd, \text{ mit } 0 < c \leq a - c < a \text{ und } 0 < d \leq b - d < b.$$

zu A 11.12:

Durch das Anhängen eines Quadrats erhöht sich die Anzahl der Randpunkte um 2 und es kommt kein innerer Punkt hinzu. Da die Anzahl der Randpunkte mit $\frac{1}{2}$ multipliziert wird, stimmt die Berechnung des Flächeninhalts.

zu A 11.13:

Werden einzelne Quadrate am Rand ergänzt oder herausgenommen, dann verändert sich die Anzahl der Randpunkte jeweils um 2; wegen des Faktors $\frac{1}{2}$ für die Anzahl der Randpunkte bedeutet dies, dass die Formel unverändert zutrifft.

Werden k nebeneinanderliegende Quadrate ($k \geq 2$) am Rand ergänzt oder herausgenommen, dann verändert sich der Flächeninhalt um k FE.

Beim Herausnehmen nimmt die Anzahl der inneren Punkte um $k + 1$ ab, aber die Anzahl der Randpunkte nimmt um 2 zu:

$$A_{\text{neu}} = (i - k - 1) + \frac{1}{2} \cdot (r + 2) - 1 = (i + \frac{1}{2} \cdot r - 1) - k = A_{\text{alt}} - k$$

Beim Anhängen nimmt die Anzahl der inneren Punkte um $k - 1$ zu, und die Anzahl der Randpunkte nimmt um 2 zu:

$$A_{\text{neu}} = (i + k - 1) + \frac{1}{2} \cdot (r + 2) - 1 = (i + \frac{1}{2} \cdot r - 1) + k = A_{\text{alt}} + k$$

zu A 11.14:

Im ersten Beispiel kommt ein Randpunkt hinzu, die Anzahl der Randpunkte bleibt unverändert. Der Flächeninhalt nimmt um $\frac{1}{2}$ FE zu.

Im zweiten Beispiel kommen zwei Randpunkte hinzu, die Anzahl der Randpunkte bleibt unverändert. Der Flächeninhalt nimmt um 1 FE zu.

Im dritten Beispiel kommt oben kein Randpunkt hinzu, aber ein innerer Punkt; entsprechend nimmt auch der Flächeninhalt gemäß Formel um 1 FE zu. Die Erweiterung der Figur rechts entspricht dem zweiten Beispiel.

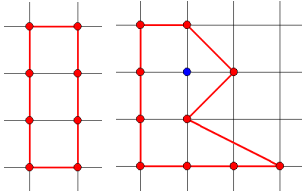
zu A 11.15:

Erstes Beispiel: Oben rechts wird eine Ecke abgeschnitten (-1 Randpunkt). Rechts erfolgen zwei schräge Schnitte, durch die ein innerer Punkt zum Randpunkt wird und zwei Randpunkte entfallen.

In der Bilanz nimmt die Anzahl der inneren Punkte um 1 und die Anzahl der Randpunkte um 2 ab, d. h. gegenüber der Ausgangsfigur mit $A = 2 + \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 7$ FE hat die veränderte Figur einen Flächeninhalt von $A = 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 - 1 = 5$ FE.

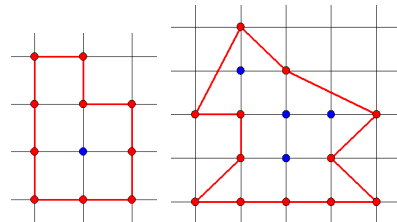
Zweites Beispiel: Durch die schrägen Schnitte entfallen oben links zwei Randpunkte, rechts oben drei Randpunkte; rechts unten entfällt ein Randpunkt, aber ein innerer Punkt wird zum Randpunkt. Links unten entfällt ein Randpunkt. Bilanz: 6 Randpunkte und ein innerer Punkt weniger: Aus $A = 5 + \frac{1}{2} \cdot 18 - 1 = 13$ FE wird daher $A = 4 + \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 9$ FE.

zu A 11.16:



1 Randpunkt wird zum inneren Punkt, 3 Randpunkte kommen hinzu.

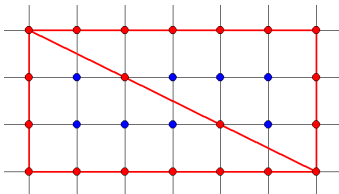
$$A_{\text{links}} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 3 \text{ FE}; A_{\text{rechts}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 - 1 = 5 \text{ FE}$$



3 Randpunkte werden zu inneren Punkten, 5 Randpunkte kommen hinzu.

$$A_{\text{links}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 10 - 1 = 5 \text{ FE}; A_{\text{rechts}} = 4 + \frac{1}{2} \cdot 12 - 1 = 9 \text{ FE}$$

zu A 11.17:



Verdoppelt man ein rechtwinkliges Dreieck zu einem Rechteck, dann verdoppelt sich die Anzahl der inneren Punkte nicht nur, sondern es kommen k Randpunkte hinzu, die zwischen den Eckpunkten auf der Diagonalen liegen:

$$i_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot i_{\text{Dreieck}} + k$$

Für die Anzahl der Randpunkte des Rechtecks gilt:

$$r_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot (r_{\text{Dreieck}} - 1 - k)$$

Für ein Rechteck wurde die Richtigkeit der Formel (11.2) nachgewiesen. Es gilt also:

$$A_{\text{Rechteck}} = i_{\text{Rechteck}} + \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Rechteck}} - 1$$

Hieraus folgt für das halb so große rechtwinklige Dreieck

$$\begin{aligned} A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{2} \cdot i_{\text{Rechteck}} + \frac{1}{4} \cdot r_{\text{Rechteck}} - \frac{1}{2} \\ &= i_{\text{Dreieck}} + \frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Dreieck}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot k - \frac{1}{2} \\ &= i_{\text{Dreieck}} + \frac{1}{2} \cdot r_{\text{Dreieck}} - 1 \end{aligned}$$

zu A 11.18:

Figur 1: $r_1 = 8$, $i_1 = 1$, $A_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 4$ FE und $r_2 = 14$, $i_2 = 4$, $A_2 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1 = 10$ FE

2 Randpunkte fallen zusammen, 1 gemeinsamer Randpunkt wird zum inneren Punkt.

$$r = r_1 + r_2 - 4 = 18, i = i_1 + i_2 + 1 = 6, A = 6 + \frac{1}{2} \cdot 18 - 1 = 14 \text{ FE.}$$

Figur 2: $r_1 = 6, i_1 = 1, A_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 3 \text{ FE}$ und $r_2 = 14, i_2 = 4, A_2 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1 = 10 \text{ FE}$

2 Randpunkte fallen zusammen, 2 gemeinsame Randpunkte werden innere Punkte.

$r = r_1 + r_2 - 6 = 14, i = i_1 + i_2 + 2 = 7, A = 7 + \frac{1}{2} \cdot 14 - 1 = 13 \text{ FE}$.

Figur 3: $r_1 = 6, i_1 = 1, A_1 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 3 \text{ FE}$ und $r_2 = 8, i_2 = 2, A_2 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 5 \text{ FE}$

2 Randpunkte fallen zusammen, 2 gemeinsame Randpunkte werden innere Punkte.

$r = r_1 + r_2 - 6 = 8, i = i_1 + i_2 + 2 = 5, A = 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 - 1 = 8 \text{ FE}$.

zu A 11.19:

Figur 1: Der Flächeninhalt der Figur ist $15,5 \text{ FE} - 2 \text{ FE} = 13,5 \text{ FE}$. Dabei kann der Flächeninhalt der Figur innen mithilfe des Satzes von Pick berechnet werden: $r_2 = 4, i_2 = 1, A_2 = 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 2 \text{ FE}$.

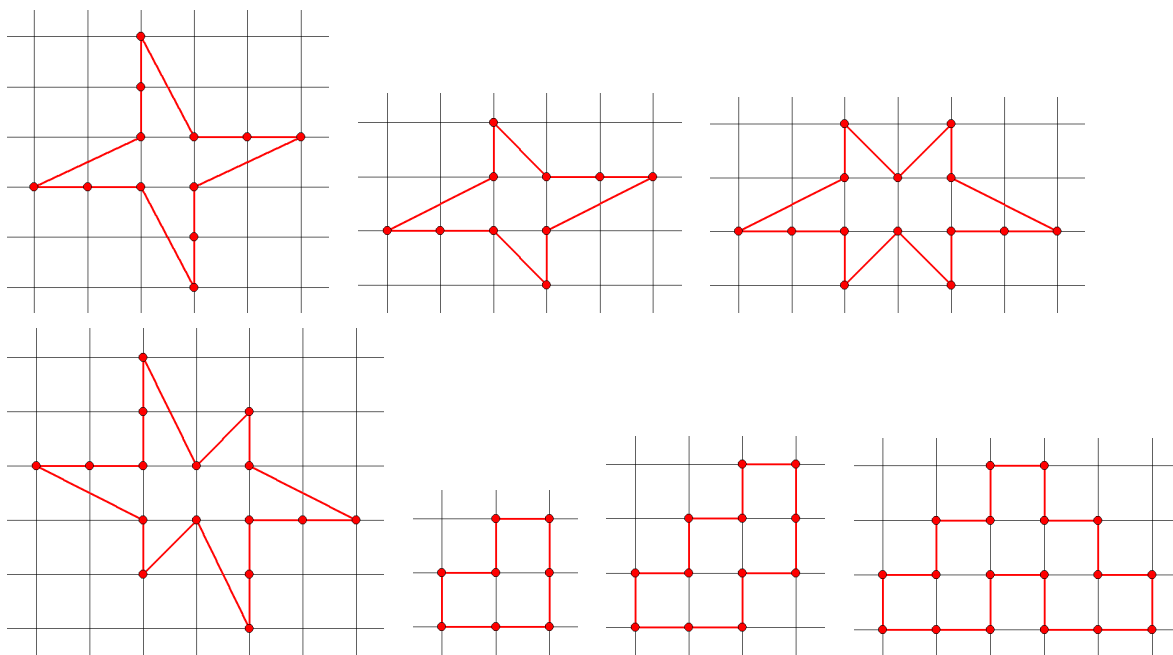
Die Figur außen hat $r_1 = 11$ Randpunkte und $i_1 = 6$ innere Punkte, sodass nach dem Satz von Pick gelten würde: $A_1 = 6 + \frac{1}{2} \cdot 11 - 1 = 10,5 \text{ FE}$, allerdings sind dabei die 4 Randpunkte und der eine innere Punkt der inneren Figur nicht beachtet, die bzgl. der äußeren Figur alle innere Punkte wären. Man müsste sie also als innere Punkte zunächst mitberücksichtigen. Dann wäre der Satz von Pick anwendbar.

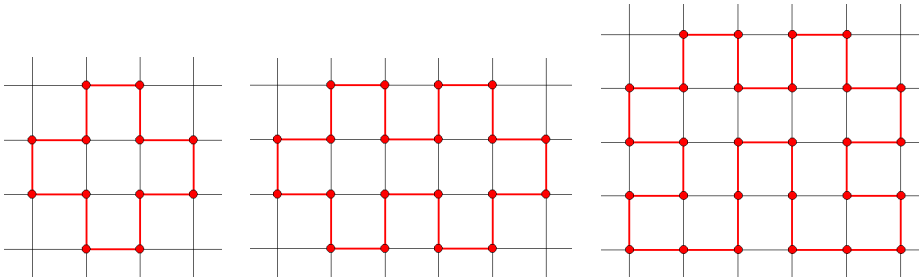
Figur 2: Die Flächeninhalte der beiden Teilfiguren können mithilfe des Satzes von Pick berechnet werden: links: $A_1 = 4 + \frac{1}{2} \cdot 6 - 1 = 6 \text{ FE}$, rechts: $A_2 = 2 + \frac{1}{2} \cdot 4 - 1 = 3 \text{ FE}$. Der Flächeninhalt der gesamten Figur ist 9 FE . Dies ergibt sich nur dann mithilfe des Satzes von Pick, wenn man den gemeinsamen Punkt der beiden Teilfiguren doppelt zählt.

Figur 3: Die Figur hat einen Flächeninhalt von $6,25 \text{ FE} + 2,75 \text{ FE} = 9 \text{ FE}$. Zählt man die Randpunkte (11) und die inneren Punkte (6), so würde dies nach dem Satz von Pick einen Flächeninhalt von $A = 6 + \frac{1}{2} \cdot 11 - 1 = 10,5 \text{ FE}$ ergeben. Der Satz von Pick ist also nicht anwendbar. (Wenn der Schnittpunkt der Randlinien ein Gitterpunkt wäre, könnte man sich wie in Figur 2 behelfen.)

zu A 11.20:

Man braucht nur die als Beispiele angegebenen Formen zu variieren ...





zu A 11.21:

(1) Figur links: $A = 10$ FE; Figur rechts: $A = 12$ FE

(2) Figur links: $r = 10, i = 1, A_D = 2 \cdot i + r - 2 = 2 + 10 - 2 = 10$;

Figur rechts: $r = 8, i = 3, A_D = 2 \cdot i + r - 2 = 6 + 8 - 2 = 12$

(3) Die Formel für das Quadratgitter $A_Q = i + \frac{1}{2} \cdot r - 1$ und die Formel für das Dreieckgitter $A_D = 2 \cdot i + r - 2$ unterscheiden sich nur um den Faktor 2: $A_D = 2 \cdot i + r - 2 = 2 \cdot (i + \frac{1}{2}r - 1) = 2 \cdot A_Q$.

Dies ist aber plausibel, denn wenn man statt eines Quadratgitters ein Rautengitter betrachtet, ändert sich *nichts* an der Flächeninhaltsformel, in der ja nur die Randpunkte und die inneren Punkte gezählt werden – die gleiche Figur hat dann auf dem Dreieckraster einen doppelt so großen Flächeninhalt wie auf dem Quadrat- oder Rautenraster.

zu A 11.22:

(1) $i_S = 1, i_D = 3, r_S = 12, r_D = 0$: $A_S = \frac{1}{3} \cdot (3 + 1) + \frac{1}{6} \cdot (0 + 12) - \frac{1}{3} = \frac{4}{3} + 2 - \frac{1}{3} = 3$

(2) $i_S = 1, i_D = 0, r_S = 8, r_D = 1$: $A_S = \frac{1}{3} \cdot (0 + 1) + \frac{1}{6} \cdot (1 + 8) - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{9}{6} - \frac{1}{3} = 1,5$

(3) Die Formel ergibt sich aus der bzgl. „ i “ und „ r “ ergänzten Formel für das Dreieckgitter und anschließender Division durch 6: $A_S = \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot i + r - 2) = \frac{1}{3} \cdot (i_D + i_S) + \frac{1}{6} \cdot (r_D + r_S) - \frac{1}{3}$.

Kap. 12

zu A 12.1:

Dass die beiden Würfel nicht unterscheidbar sind, ändert nichts an der Tatsache, dass es sich um zwei verschiedene Würfel handelt, es daher einen Unterschied macht, ob beispielsweise das Ergebnis (2|3) oder das Ergebnis (3|2) auftritt.

zu A 12.2:

(1) 3 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 4 und für Augensumme 10; 4 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 5 und für Augensumme 9; 5 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 6 und für Augensumme 8; 6 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 7.

1. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 5, 6 oder 7 fällt.*
2. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 5, 8 oder 7 fällt.*
3. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 9, 6 oder 7 fällt.*
4. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 4, 9, 8 oder 7 fällt.*
5. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 5, 6 oder 7 fällt.*
6. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 5, 8 oder 7 fällt.*
7. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 9, 6 oder 7 fällt.*
8. faire Regel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 10, 9, 8 oder 7 fällt.*

(2) Insgesamt gibt es 44 verschiedene faire Spielregeln

denn man kann die Summe 18 wie folgt aus 5 Summanden bilden:

$$18 = 1+1+5+5+6 \quad (1 \text{ Spielregel})$$

nämlich: 1 mögliche Kombination gibt es für Augensumme 2 und für Augensumme 12; 5 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 6 und für Augensumme 8; 6 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 7. Daher lautet die faire Spielregel: *Man gewinnt, wenn Augensumme 2, 12, 6, 8 oder 7 fällt.*

$$18 = 1+2+4+5+6 \quad (16 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

$$18 = 1+3+3+5+6 \quad (8 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

$$18 = 1+3+4+4+6 \quad (4 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

$$18 = 1+3+4+5+5 \quad (8 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

$$18 = 2+2+3+5+6 \quad (4 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

$$18 = 2+2+4+4+6 \quad (1 \text{ Spielregel})$$

$$18 = 2+2+4+5+5 \quad (2 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

nämlich: 2 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 3 und für Augensumme 11; 4 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 5 und für Augensumme 9; 5 mögliche Kombinationen gibt es für Augensumme 6 und für Augensumme 8. Daher lauten die beiden fairen Spielregeln:
Man gewinnt, wenn Augensumme 3, 11, 5, 6 oder 8 fällt. bzw.
Man gewinnt, wenn Augensumme 3, 11, 9, 6 oder 8 fällt. bzw.

$$18 = 2+3+3+5+5 \quad (2 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

$$18 = 2+3+4+4+5 \quad (8 \text{ verschiedene Spielregeln})$$

(3) Um faire Spielregeln für drei oder vier Mitspieler zu bestimmen, muss man überlegen auf welche Weise die Kombinationsanzahlen 12 bzw. 9 erhalten werden können. Hier einige Beispiele

... für faire Spielregeln für drei Personen:

A gewinnt mit den Augensummen	B gewinnt mit den Augensummen	C gewinnt mit den Augensummen
4, 5 oder 6 (3+4+5 = 12 Kombinationen)	8, 9 oder 10 (5+4+3 = 12 Kombinationen)	2, 3, 7, 11 oder 12 (1+2+6+2+1 = 12 Kombinationen)
2, 3, 4 oder 7 (1+2+3+6 = 12 Kombinationen)	5, 6 oder 10 (4+5+3 = 12 Kombinationen)	8, 9, 11 oder 12 (5+4+2+1 = 12 Kombinationen)
2, 4, 5 oder 9 (1+3+4+4 = 12 Kombinationen)	3, 6 oder 8 (2+5+5 = 12 Kombinationen)	7, 10, 11 oder 12 (6+3+2+1 = 12 Kombinationen)

... für faire Spielregeln für vier Personen:

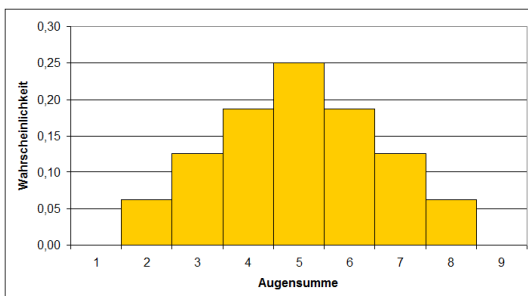
A gewinnt mit den Augensummen	B gewinnt mit den Augensummen	C gewinnt mit den Augensummen	D gewinnt mit den Augensummen
4 oder 7 (3+6 = 9 Kombinationen)	5 oder 6 (4+5 = 9 Kombinationen)	8 oder 9 (5+4 = 9 Kombinationen)	2, 3, 10, 11 oder 12 (1+2+3+2+1 = 9 Kombinationen)
3, 4 oder 5 (2+3+4 = 9 Kombinationen)	7, 11 oder 12 (6+2+1 = 9 Kombinationen)	6 oder 9 (5+4 = 9 Kombinationen)	2, 8 oder 10 (1+5+3 = 9 Kombinationen)

zu A 12.3:

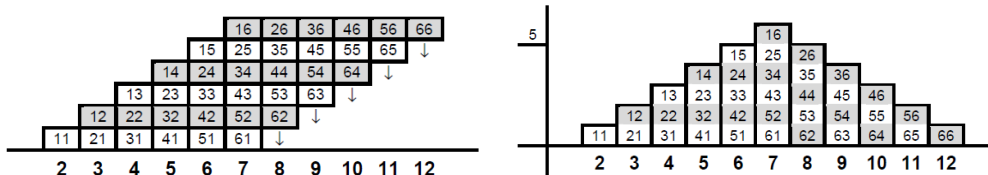
Kombinationstabelle für den 2-fachen Tetraederwurf

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Histogramm zur Wahrscheinlichkeitsverteilung des 2-fachen Tetraederwurfs



weitere Möglichkeit:



(2) Erzeugende Funktion für den 1-fachen Tetraederwurf: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4)$

Zerlegung des Polynoms in Faktoren: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x \cdot (1 + x) \cdot (1 + x^2)$

Hieraus ergeben sich zwei Möglichkeiten, die Faktoren zu kombinieren:

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^1 + x^2) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^0 + x^2) \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^0 + x^1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^1 + x^3)$$

Hierzu gehören 2er-Glücksräder mit den Augenzahlen (1, 2) und (0, 2) bzw. (0, 1) und (1, 3), wie man den folgenden Kombinationstabellen entnehmen kann:

	0	2
1	1	3
2	2	4

	1	3
0	1	3
1	2	4

(3)

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

	1	3	3	5
1	2	4	4	6
2	3	5	5	7
2	3	5	5	7
3	4	6	6	8

erzeugende Funktion für die Augensumme:

$$f^2(x) = \frac{1}{4} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4] \cdot \frac{1}{4} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4] \\ = \frac{1}{16} \cdot (1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8)$$

alternative Beschriftung für zwei 4er-Glücksräder
(1, 2, 2, 3) und (1, 3, 3, 5)

Zerlegung der erzeugenden Funktion:

$$f^2(x) = \frac{1}{4} \cdot [1x^1 + 2x^2 + 1x^3] \cdot \frac{1}{4} \cdot [1x^1 + 2x^3 + 1x^5] \\ = \frac{1}{16} \cdot (1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8)$$

	1	2	3	3	4	4	5	6
1	2	3	4	4	5	5	6	7
2	3	4	5	5	6	6	7	8

	1	2	2	3	3	4	4	5
1	2	3	3	4	4	5	5	6
3	4	5	5	6	6	7	7	8

8er-Glücksrad mit 2er-Glücksrad mit Beschriftung
(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6) und (1, 2)

Zerlegung der erzeugenden Funktion:

$$f^2(x) = \frac{1}{8} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 1x^5 + 1x^6] \cdot \frac{1}{2} \cdot [1x^1 + 1x^2] \\ = \frac{1}{16} \cdot (1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8)$$

8er-Glücksrad mit 2er-Glücksrad mit Beschriftung
(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5) und (1, 3)

Zerlegung der erzeugenden Funktion:

$$f^2(x) = \frac{1}{8} \cdot [1x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 1x^5] \cdot \frac{1}{2} \cdot [1x^1 + 1x^3] \\ = \frac{1}{16} \cdot (1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + 1x^8)$$

(4) $f'(x) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2x + 3x^2 + 4x^3)$; $f''(x) = \frac{1}{4} \cdot (2 + 6x + 12x^2)$, also

$$f'(1) = \frac{1}{4} \cdot (1 + 2 + 3 + 4) = 2,5 = \mu$$

$$f''(1) = \frac{1}{4} \cdot (2 + 6 + 12) = 5, \text{ also } \sigma^2 = 2,5 + 5 - 2,5^2 = 1,25$$

zu A 12.4:

Die erzeugende Funktion der Augensumme ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4) \cdot \frac{1}{6} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6) \\ = \frac{1}{24} \cdot (1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 4x^6 + 4x^7 + 3x^8 + 2x^9 + 1x^{10})$$

Aus den verschiedenen Zerlegungen der erzeugenden Funktionen ergeben sich die alternativen Zufallsgeräte, wobei ein 2er-Glücksrad durch eine Münze ersetzt werden kann, ein 8er-Glücksrad durch ein regelmäßiges Oktaeder und ein 12er-Glücksrad durch ein regelmäßiges Dodekaeder:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4) \cdot \frac{1}{6} \cdot (1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^5 + 1x^6) \\
&= \frac{1}{2} \cdot [1x + 1x^2] \cdot \frac{1}{12} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 1x^7 + 1x^8] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [1x + 1x^3] \cdot \frac{1}{12} \cdot [1x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 1x^7] \\
&= \frac{1}{2} \cdot [1x^1 + 1x^4] \cdot \frac{1}{12} \cdot [1x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 1x^6] \\
&= \frac{1}{8} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 1x^3 + 2x^4 + 1x^5 + 1x^6 + 1x^7] \cdot \frac{1}{3} \cdot [1x + 1x^2 + 1x^3] \\
&= \frac{1}{8} \cdot [1x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 1x^5] \cdot \frac{1}{3} \cdot [1x^1 + 1x^3 + 1x^5] \\
&= \frac{1}{4} \cdot [1x + 2x^2 + 1x^3] \cdot \frac{1}{6} \cdot [1x^1 + 2x^3 + 2x^5 + 1x^7] \\
&= \frac{1}{4} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 1x^4 + 1x^5] \cdot \frac{1}{6} \cdot [1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 1x^4 + 1x^5] \\
&= \frac{1}{4} \cdot [1x^1 + 1x^3 + 1x^4 + 1x^6] \cdot \frac{1}{6} \cdot [1x^1 + 2x^2 + 2x^3 + 1x^4]
\end{aligned}$$

Zufallsgerät 1	Beschriftung	Zufallsgerät 2	Beschriftung
Münze	(1, 2)	Dodekaeder	(1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8)
Münze	(1, 3)	Dodekaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7)
Münze	(1, 4)	Dodekaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6)
3er-Glücksrad	(1, 2, 3)	Oktaeder	(1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7)
3er-Glücksrad	(1, 3, 5)	Oktaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5)
Tetraeder	(1, 2, 2, 3)	Hexaeder	(1, 3, 3, 5, 5, 7)
Tetraeder	(1, 2, 4, 5)	Hexaeder	(1, 2, 3, 3, 4, 5)
Tetraeder	(1, 3, 4, 6)	Hexaeder	(1, 2, 2, 3, 3, 4)

zu A 12.5:

- 10-faches Würfeln mit einem regelmäßigen Hexaeder:

$$\mu = 10 \cdot 3,5 = 35; \sigma^2 = 10 \cdot 35/12 \approx 29,17; \sigma \approx 5,40$$

- in ca. zwei Drittel der Fälle im Intervall zwischen 30 und 40 (exakt: 69,1 %),
- mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % im Intervall zwischen 26 und 44 (exakt: 92,1 %),
- mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % im Intervall zwischen 25 und 45 (exakt: 94,8 %)
- mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99 % im Intervall zwischen 21 und 49 (exakt: 99,3 %).

- 10-faches Würfeln mit einem regelmäßigen Oktaeder:

$$\mu = 10 \cdot 4,5 = 45; \sigma^2 = 10 \cdot 63/12 = 52,5; \sigma \approx 7,25$$

- in ca. zwei Drittel der Fälle im Intervall zwischen 38 und 51 (exakt: 66,5 %),
- mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 90 % im Intervall zwischen 33 und 57 (exakt: 91,5 %),
- mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % im Intervall zwischen 31 und 59 (exakt: 95,4 %),
- mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 99 % im Intervall zwischen 26 und 64 (exakt: 99,3 %).

Kap. 13

zu A 13.1:

Flächeninhalt der Teilfiguren:

$$2 \cdot (8^2 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8) = 272 \text{ FE}$$

$$2 \cdot (8 \cdot 21 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 21) = 713 \text{ FE}$$

Flächeninhalt der Gesamtfigur:

$$13 \cdot 21 = 273 \text{ FE}$$

$$21 \cdot 34 = 714 \text{ FE}$$

In beiden Fällen hat der „weiße Streifen“ einen Flächeninhalt von 1 FE.

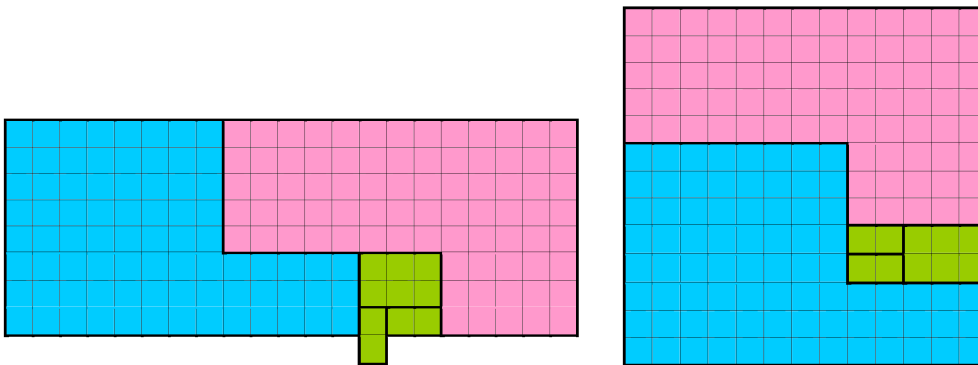
Der Flächenanteil beträgt 0,37 % bzw. 0,14 % an der Gesamtfigur.

zu A 13.2:

Bei der zweiten Figur hatte das grüne Dreieck einen Steigungswinkel von $\tan^{-1}(8/13) \approx 31,61^\circ$, das hellblaue von $\tan^{-1}(5/8) \approx 32,01^\circ$. Auch dieser Unterschied von $0,40^\circ$ ist kaum zu erkennen! Man sieht die gesamte Figur als Dreieck an, dessen Steigungswinkel sich aus dem Seitenverhältnis 13:21 ergibt: $\tan^{-1}(13/21) \approx 31,76^\circ$.

Bei der dritten Figur hatte das grüne Dreieck einen Steigungswinkel von $\tan^{-1}(5/8) \approx 32,01^\circ$, das hellblaue von $\tan^{-1}(3/5) \approx 30,96^\circ$. Diesen Unterschied von $1,05^\circ$ kann man *vielleicht* erkennen! Man sieht die gesamte Figur als Dreieck an, dessen Steigungswinkel sich aus dem Seitenverhältnis 8:13 ergibt: $\tan^{-1}(8/13) \approx 31,61^\circ$.

zu A 13.3:



zu A 13.4:

Bei Rätsel 3 hat das hellblaue Dreieck Katheten mit den Längen 5 LE und 3 LE; ein solches Dreieck tritt hier in der Figur nicht auf (hier hat eine Kathete die Länge 3 LE und die Hypotenuse die Länge 5 LE. Das grüne Dreieck hat in Rätsel 3 Katheten mit den Längen 5 LE und 8 LE; hier hat die Hypotenuse die Länge 8 LE und eine Kathete die Länge 5 LE. Entsprechendes gilt für die Abbildung aus Rätsel 1.

Bei den hier betrachteten Figuren treten fast-ähnliche Dreiecke auf, bei denen das Verhältnis der Länge einer Kathete zur Länge der Hypotenuse benachbarte Fibonacci-Zahlen sind; die zugehörigen Winkel können mithilfe der Umkehrfunktion des Sinus berechnet werden:

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36,87^\circ ; \quad \sin^{-1}\left(\frac{5}{8}\right) \approx 38,68^\circ ; \quad \sin^{-1}\left(\frac{8}{13}\right) \approx 37,98^\circ ; \quad \sin^{-1}\left(\frac{13}{21}\right) \approx 38,25^\circ ; \dots$$

zu A 13.5:

$$\frac{f_n}{f_{n+2}} = \frac{f_n}{f_n + f_{n+1}} = \frac{1}{\frac{f_n + f_{n+1}}{f_n}} = \frac{1}{1 + \frac{f_{n+1}}{f_n}} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{2}{\sqrt{5}-1}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} \approx 0,382;$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) = 20,905157...^\circ$$

zu A 13.6:

Die beiden dunkelgrün gefärbten Dreiecke haben jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 7 = 10,5$ FE. Die beiden violett gefärbten Dreiecke haben jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$ FE. Die beiden blaugrün gefärbten Gnomone haben jeweils einen Flächeninhalt von 14 FE.

Addiert man diese Flächeninhalte, so kommt man insgesamt auf einen Flächeninhalt von $2 \cdot (10,5 + 5 + 14) = 59$ FE.

Beachtet man nur die Breite der Grundseite und die Höhe der beiden Figuren, dann ergibt sich in beiden Fällen ein Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60$ FE.

Die violett gefärbten rechtwinkligen Dreiecke haben einen spitzen Winkel von $\tan^{-1}(2/5) \approx 21,80^\circ$, die dunkelgrün gefärbten von $\tan^{-1}(3/7) \approx 23,20^\circ$.

Bei genauem Hinsehen erkennt man, dass die „Schenkel“ des gleichschenkligen Beinahe-Dreiecks in der 1. Figur nach innen und bei der 2. Figur nach außen geknickt sind. Würde man bei der 1. Figur die Eckpunkte miteinander verbinden, dann würde auf beiden Seiten ein sehr schmaler weißer Streifen sichtbar werden; dieser hat jeweils einen Flächeninhalt von $\frac{1}{2}$ FE, wie sich aus der Differenz $60 \text{ FE} - 59 \text{ FE}$ ergibt.

Auch bei der 2. Figur sind 59 FE gefärbt, addiert man die Flächeninhalte der beiden weiß gelassenen Quadrate hinzu, so ergibt sich hier eine Fläche von 61 FE. Gegenüber dem gleichschenkligen Dreieck mit Grundseite 10 LE und Höhe 12 LE kommen hier auf beiden Schenkeln die bei der 1. Figur festgestellten Streifen von jeweils $\frac{1}{2}$ FE hinzu.

zu A 13.7:

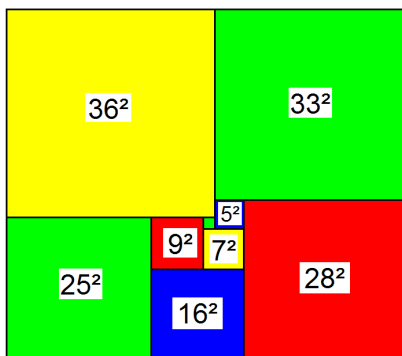
In beiden Figuren werden folgenden vier Puzzlestücke verwendet:

- Hellblaues rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Länge 5 LE und 13 LE, also einem Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 13 = 32,5$ FE. Der spitze Winkel hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(5/13) \approx 21,04^\circ$.
- Rotes rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten der Länge 8 LE und 21 LE, also einem Flächeninhalt von $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 21 = 84$ FE. Der spitze Winkel hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(8/21) \approx 20,85^\circ$.
- Gelbes rechtwinkliges Trapez mit den Grundseiten 34 LE und 13 LE und der Höhe 8 LE, also einem Flächeninhalt von $34 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 188$ FE. Der spitze Winkel hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(8/21) \approx 20,85^\circ$, d. h., das rote Dreieck und das gelbe Trapez ergänzen sich zu einem Rechteck.
- Grünes rechtwinkliges Trapez mit den Grundseiten 34 LE und 21 LE und der Höhe 8 LE, also einem Flächeninhalt von $34 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 8 = 220$ FE. Der spitze Winkel des gegenüber einem Rechteck fehlenden rechtwinkligen Dreiecks hat eine Winkelgröße von $\tan^{-1}(5/13) \approx 21,04^\circ$, d. h., das blaue Dreieck und das grüne Trapez ergänzen sich zu einem Rechteck.

Die erste Rechteckfigur hat einen Flächeninhalt von $13 \cdot 55 = 715$ FE, die zweite von $21 \cdot 34 = 714$ FE. Der Unterschied von 1 FE kommt durch die nicht genau zueinander passenden schrägen Randlinien der beiden Trapeze und Dreiecke zustande.

Kap. 14

zu A 14.1:



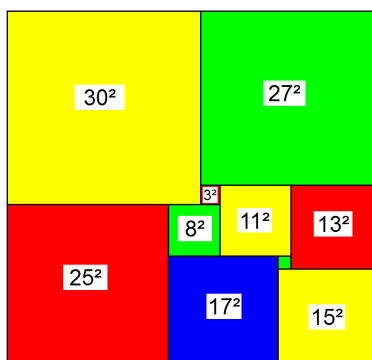
Maße 69 LE x 61 LE: Nach Angabe haben die Quadrate die Seitenlängen 2, 5, 7, 9, 16, 25, 28, 33, 36 LE. Die Seitenlängen lassen sich dann von innen nach außen gehend identifizieren.

Beispiele für horizontale Schnitte durch die Figur (von links nach rechts notiert):

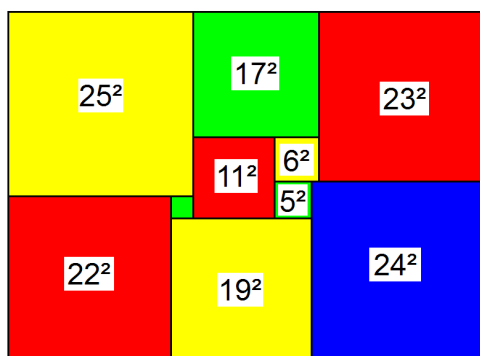
36 LE (gelb) + 33 LE (grün) = 69 LE; 25 LE (grün) + 16 LE (blau) + 28 LE (rot) = 69 LE.

Beispiele für vertikale Schnitte durch die Figur (von oben nach unten notiert):

36 LE (gelb) + 25 LE (grün) = 61 LE; 33 LE (grün) + 28 LE (rot) = 61 LE.



Maße 57 LE x 55 LE



Maße 65 LE x 47 LE

zu A 14.2:

$$c = x + 1 \quad d = c + 1 = x + 2 \quad e = d + 1 = x + 3 \quad b = c + x = 2x + 1$$

$$g = (e + 1) - x = 4 \quad f = e + g = x + 7 \quad a = f + g = x + 11$$

$$\text{Breite oben: } a + b = 3x + 12 \quad \text{Breite unten: } f + e + d = 3x + 12$$

$$\text{Höhe links: } a + f = 2x + 18 \quad \text{Höhe rechts: } b + c + d = 4x + 4$$

$$2x + 18 = 4x + 4 \Leftrightarrow x = 7$$

$$a = 18 ; b = 15 ; c = 8 ; d = 9 ; e = 10 ; f = 14 ; g = 4 ; x = 7 \text{ (Format: 33 LE x 32 LE)}$$

zu A 14.3:

(1) 33x32-Rechtecks aus Abb. 14.3: (18,5)(7,8)(14,4)(10,1)(9)

(2) 57x55-Rechtecks aus Abb. 14.5a: (30,27)(3,11,13)(25,8)(17,2)(5)

(3) 65x47-Rechtecks aus Abb. 14.5b: (25,17,23)(11,6)(5,24)(22,3)(19)

zu A 14.4:

$$\begin{aligned} h &= x + 1 & c &= h + 1 = x + 2 & d &= c + 1 = x + 3 & b &= c + h = 2x + 3 \\ e &= x + g & f &= e + g = x + 2g & a &= f + g = x + 3g \end{aligned}$$

Aus $a + g = b + h + x$ ergibt sich: $x + 3g + g = 2x + 3 + x + 1 + x \Leftrightarrow 4g = 3x + 4$.

horizontal liegende Quadrate: $a + b = x + 3g + 2x + 3 = 3x + 3g + 3$ und
 $f + e + d = x + 2g + x + g + x + 3 = 3x + 3g + 3$

vertikal liegende Quadrate: $a + f = x + 3g + x + 2g = 2x + 5g$ und
 $b + c + d = 2x + 3 + x + 2 + x + 3 = 4x + 8$

Aus $2x + 5g = 4x + 8$ ergibt sich: $5g = 2x + 8$.

Da $5 \cdot 4g = 15x + 20 = 4 \cdot 5g = 8x + 32$ folgt:

$7x = 12$, also $x = 12/7$ und weiter:

$5g = 24/7 + 8 = 80/7$, d. h. $g = 16/7$; $h = 19/7$;
 $c = 26/7$; $d = 33/7$; $b = 45/7$; $e = 4$; $f = 44/7$; $a = 60/7$.

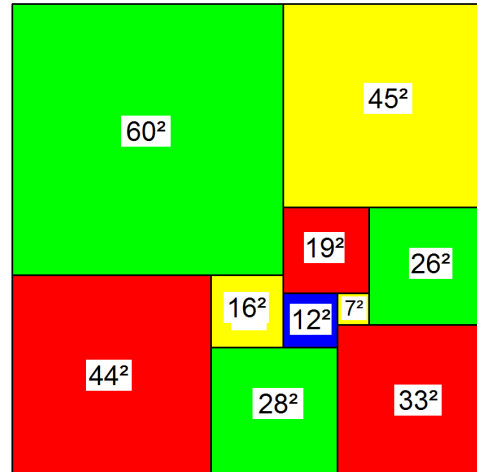
Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 7 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 60$ LE, $b = 45$ LE, $c = 26$ LE, $d = 33$ LE,

$e = 28$ LE, $f = 44$ LE, $g = 16$ LE, $h = 19$ LE und

$x = 12$ LE, vgl. Grafik rechts.

Format: 105 LE x 104 LE



Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation: (60,45)(19,26)(44,16)(12,7)(33)(28)

$$\begin{aligned} f &= x + h & g &= x + f = 2x + h & a &= g + x = 3x + h & e &= f + h = x + h + h = x + 2h \\ d &= e + 1 = x + 2h + 1 & c &= d + 1 = x + 2h + 2 & b &= c + 1 = x + 2h + 3 \end{aligned}$$

vertikal liegende Quadrate: $a + g = 3x + h + 2x + h = 5x + 2h$ und

$b + e = x + 2h + 3 + x + 2h = 2x + 4h + 3$ sowie $c + d = x + 2h + 2 + x + 2h + 1 = 2x + 4h + 3$

Hieraus kann man die Bedingung $5x + 2h = 2x + 4h + 3 \Leftrightarrow 3x = 2h + 3$ gewinnen.

horizontal liegende Quadrate: $a + b + c = 3x + h + x + 2h + 3 + x + 2h + 2 = 5x + 5h + 5$ und
 $g + f + e + d = 2x + h + x + h + x + 2h + x + 2h + 1 = 5x + 6h + 1$

Hieraus folgt: $5x + 5h + 5 = 5x + 6h + 1 \Leftrightarrow h = 4$.

Aus $3x = 2h + 3$ ergibt sich: $3x = 11$, also $x = 11/3$,
 und weiter: $a = 15$, $b = 44/3$, $c = 41/3$, $d = 38/3$,
 $e = 35/3$, $f = 23/3$, $g = 34/3$.

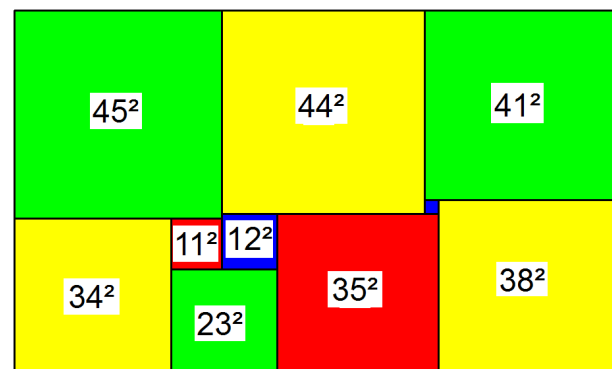
Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 3 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 45$ LE, $b = 44$ LE, $c = 41$ LE, $d = 38$ LE,

$e = 35$ LE, $f = 23$ LE, $g = 34$ LE, $h = 12$ LE und

$x = 11$ LE, vgl. Grafik rechts.

Format: 130 LE x 79 LE



Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation: (45,44,41)(3,38)(12,35)(34,11)(23)

$h = x + 1$ $g = h + x = 2x + 1$ $f = g + x = 3x + 1$ $d = f + g = 5x + 2$ $e = f + d = 8x + 3$
 $c = d + g + h = 5x + 2 + 2x + 1 + x + 1 = 8x + 4$
 $b = c + h + 1 = 8x + 4 + x + 1 + 1 = 9x + 6$ $a = b + 1 = 9x + 7$
 vertikal liegende Quartale: $a + e = 9x + 7 + 8x + 3 = 17x + 10$ und $b + c = 8x + 4 + 9x + 6 = 17x + 10$
 horizontal liegende Quadrate: $a + b = 9x + 7 + 9x + 6 = 18x + 13$ und
 $e + d + c = 8x + 3 + 5x + 2 + 8x + 4 = 21x + 9$

Hieraus folgt:

$$18x + 13 = 21x + 9 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = 4/3$$

und weiter: $h = 7/3$, $g = 11/3$, $f = 15/3$, $d = 26/3$, $e = 41/3$, $c = 44/3$, $b = 54/3$, $a = 57/3$.

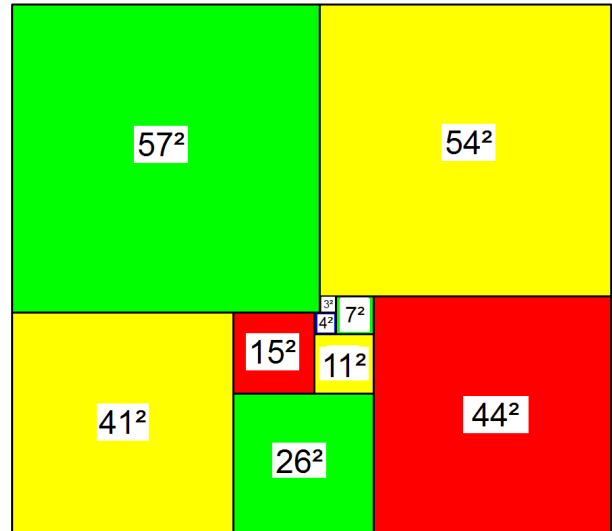
Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 3 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 57$ LE, $b = 54$ LE, $c = 44$ LE, $d = 26$ LE,
 $e = 41$ LE, $f = 15$ LE, $g = 11$ LE, $h = 7$ LE und
 $x = 4$ LE, vgl. Grafik rechts.

Format: 111 LE x 98 LE

Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation:

(57,54)(3,7,44)(41,15,4)(11)(26)



$g = x + 1$ $e = g + 1 = x + 2$ $f = g + e = 2x + 3$ $a = f + g + x = 4x + 4$
 $d = f - x = x + 3$ $c = h + d = h + x + 3$ $b = c + h = 2h + x + 3$
 $a + x = b + h \Leftrightarrow 4x + 4 + x = 2h + x + 3 + h \Leftrightarrow 4x + 1 = 3h$, also: $h = 4/3 \cdot x + 1/3$
 also: $c = 4/3 \cdot x + 1/3 + x + 3 = 7/3 \cdot x + 10/3$ und $b = 2 \cdot (4/3 \cdot x + 1/3) + x + 3 = 11/3 \cdot x + 11/3$

vertikal liegende Quadrate: $a + f = 4x + 4 + 2x + 3 = 6x + 7$ und
 $b + c = 11/3 \cdot x + 11/3 + 7/3 \cdot x + 10/3 = 6x + 7$

horizontal liegende Quadrate: $a + b = 4x + 4 + 11/3 \cdot x + 11/3 = 23/3 \cdot x + 23/3$ und
 $f + e + d + c = 2x + 3 + x + 2 + x + 3 + 7/3 \cdot x + 10/3 = 19/3 \cdot x + 34/3$

Hieraus folgt: $23/3 \cdot x + 23/3 = 19/3 \cdot x + 34/3 \Leftrightarrow 4/3 \cdot x = 11/3 \Leftrightarrow x = 11/4$

und weiter:

$a = 60/4$, $b = 55/4$, $c = 39/4$, $d = 23/4$, $e = 19/4$,
 $f = 34/4$, $g = 15/4$, $h = 16/4$

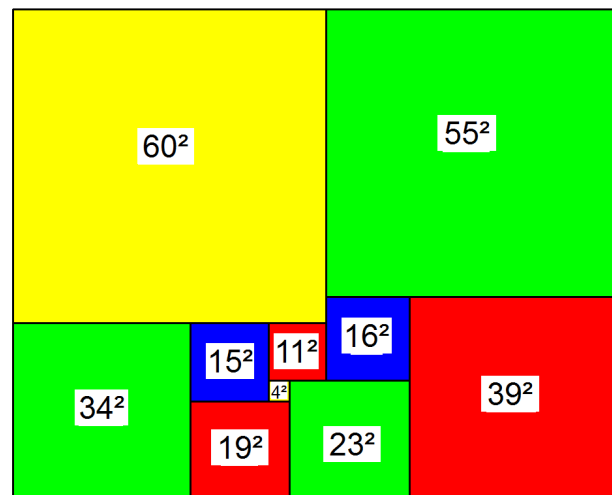
Wählt man für das kleinste (weiße) Quadrat die Seitenlänge 4 LE, so ergeben sich die Seitenlängen:

$a = 60$ LE, $b = 55$ LE, $c = 39$ LE, $d = 23$ LE,
 $e = 19$ LE, $f = 34$ LE, $g = 15$ LE, $h = 16$ LE und
 $x = 11$ LE, vgl. Grafik rechts.

Format: 115 LE x 94 LE

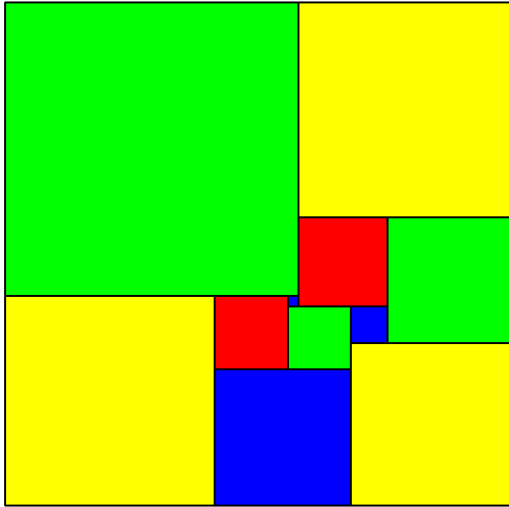
Beschreibung mithilfe der Bouwkamp-Notation:

(60,55)(16,39)(34,15,11)(4,23)(19)

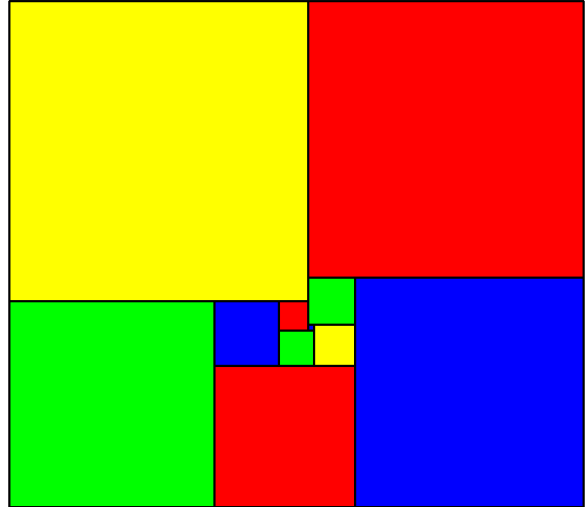


zu A 14.5:

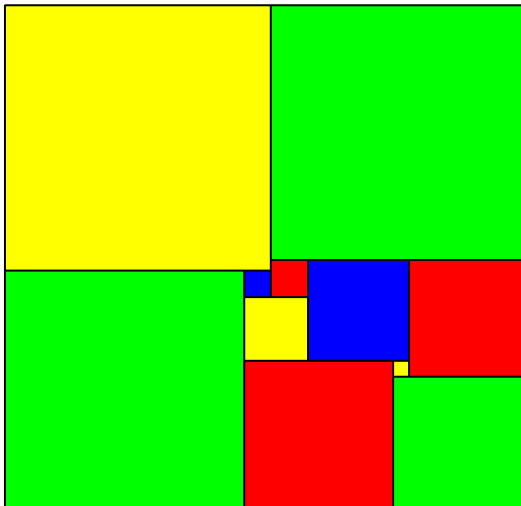
(1) (56,41)(17,24)(40,14,2)(12,7)(31)(26),



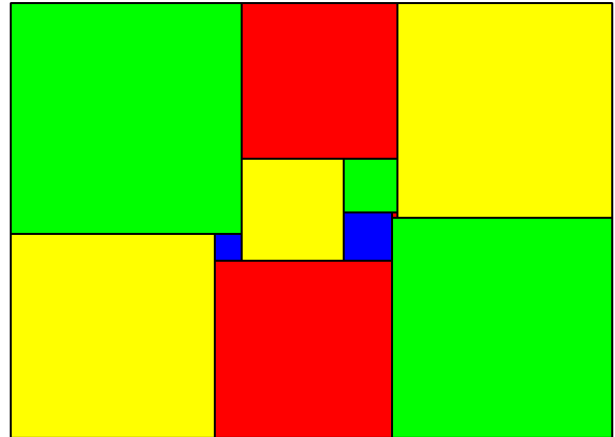
(2) (51,47)(8,39)(35,11,5)(1,7)(6)(24)



(3) (50,48)(7,19,22)(45,5)(12)(28,3)(25)



(4) (43,29,40)(19,10)(9,1)(41)(38,5)(33).



zu A 14.6:

Dem kleinen roten Quadrat im linken unteren Viertel der Figur wird die Seitenlänge 1 LE zugeordnet.

$$m = n + 1 \quad l = m + 1 = n + 2 \quad k = l + 1 = n + 3$$

$$p + n = k + 1 \Leftrightarrow p + n = n + 3 + 1 \Leftrightarrow p = 4$$

$$o = n - p = n - 4$$

$$q = o - p = n - 4 - 4 = n - 8$$

$$a = m + n + o = n + 1 + n + n - 4 = 3n - 3$$

In der rechten unteren Ecke der Figur ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$e = u + x \quad f = e + x = u + 2x \quad g = f + x = u + 3x \quad c = u + e = 2u + x$$

$$h = g - v = u + 3x - v \quad s = h - v = u + 3x - 2v$$

$$t + u = v + g + x = v + u + 3x + x \Leftrightarrow t = v + 4x$$

$$r + s = t + v, \text{ also } r + u + 3x - 2v = v + 4x + v, \text{ d. h. } r = 4v - u + x$$

$$\mathbf{d} = r + t = 4v + x - u + v + 4x = 5v + 5x - u$$

$$\mathbf{b} = c + d = 2u + x + 5v + 5x - u = u + 6x + 5v$$

Im Zusammenhang mit den zuerst betrachteten Quadraten ergibt sich:

$$h + s + q = p + k, \text{ also } u + 3x - v + u + 3x - 2v + n - 8 = 4 + n + 3 \Leftrightarrow \mathbf{2u - 3v + 6x = 15}$$

- horizontal liegende Quadrate:

$$a + b = 3n - 3 + u + 6x + 5v$$

$$m + n + o + d + c = n + 1 + n + n - 4 + 5v + 5x - u + 2u + x = 3n + 5v + 6x + u - 3$$

$$l + k + h + g + f = n + 2 + n + 3 + u + 3x - v + u + 3x + u + 2x = 2n + 3u + 8x - v + 5$$

Hieraus ergibt sich die Gleichung:

$$3n + 5v + 6x + u - 3 = 2n + 3u + 8x - v + 5 \Leftrightarrow \mathbf{n - 2u + 6v - 2x = 8}$$

- vertikal liegende Quadrate:

$$a + m + l = 3n - 3 + n + 1 + n + 2 = 5n$$

$$b + d + t + g = u + 6x + 5v + 5v + 5x - u + v + 4x + u + 3x = u + 18x + 11v$$

$$b + c + e + f = u + 6x + 5v + 2u + x + u + x + u + 2x = 5u + 10x + 5v$$

Hieraus ergeben sich zwei Gleichungen:

$$5n = u + 18x + 11v \Leftrightarrow \mathbf{-5n + u + 11v + 18x = 0}$$

$$u + 18x + 11v = 5u + 10x + 5v \Leftrightarrow \mathbf{-4u + 6v + 8x = 0}$$

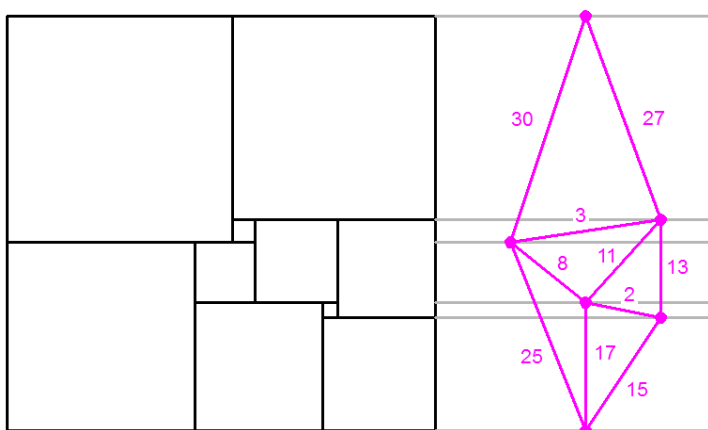
Das lineare Gleichungssystem hat die Lösung $n = 11$, $u = 6$, $v = 2$ und $x = 1,5$.

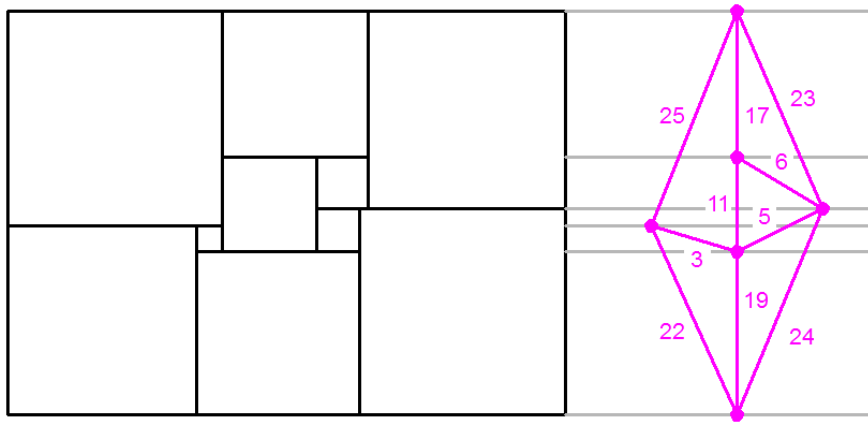
Hieraus folgt: $a = 30$, $b = 25$, $c = 13,5$, $d = 11,5$, $e = 7,5$, $f = 9$, $g = 10,5$, $h = 8,5$, $k = 14$, $l = 13$, $m = 12$, $o = 7$, $p = 4$, $q = 3$, $r = 3,5$, $s = 6,5$, $t = 8$.

Wählt man für das kleinere rote Quadrat die Seitenlänge 2 LE, dann ergeben sich folgende ganzzahlige Seitenlängen:

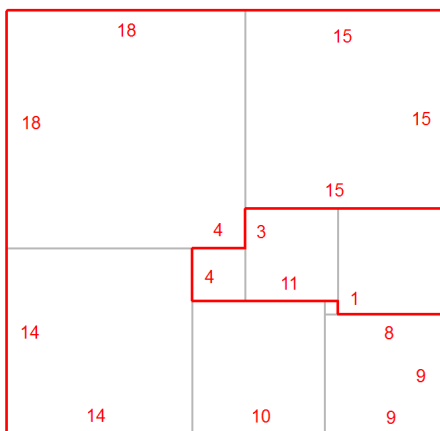
$a = 60$ LE, $b = 50$ LE, $c = 27$ LE, $d = 23$ LE, $e = 15$ LE, $f = 18$ LE, $g = 21$ LE, $h = 17$ LE, $k = 28$ LE, $l = 26$ LE, $m = 24$ LE, $n = 22$ LE, $o = 14$ LE, $p = 8$ LE, $q = 6$ LE, $r = 7$ LE, $s = 13$ LE, $t = 16$ LE, $u = 12$ LE, $v = 4$ LE und $x = 3$ LE.

zu A 14.7:

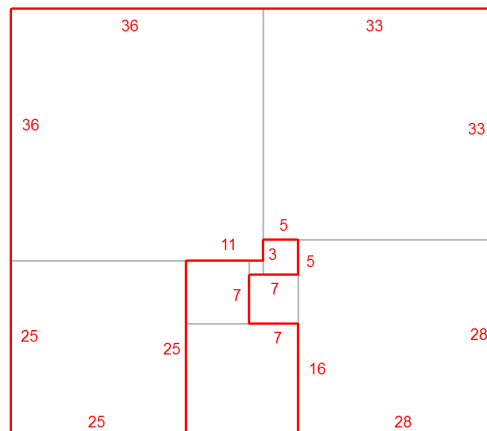




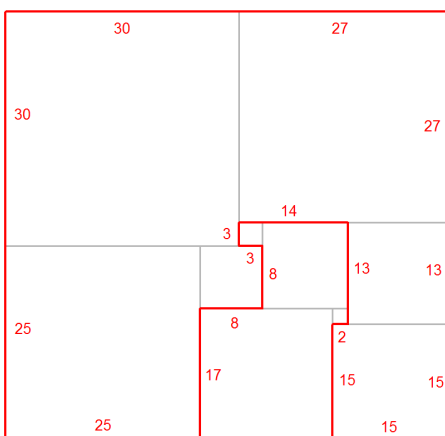
zu A 14.8:



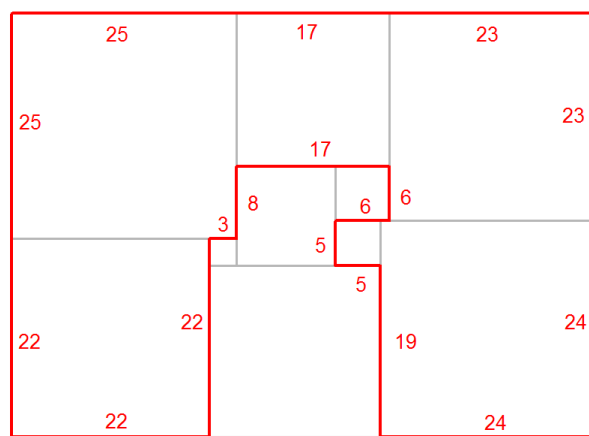
Gesamtlänge: 168 LE



Gesamtlänge: 330 LE



Gesamtlänge: 290 LE



Gesamtlänge: 296 LE

Kap. 15**zu A 15.1:**

Problem 1:

r	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	3/10	1/3	2/5	1/2
x	9/91	8/73	7/57	6/43	5/31	4/21	3/13	21/79	2/7	6/19	1/3

Problem 2:

r	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	3/7	1/2	3/5	2/3	3/4
x	36/121	8/25	28/81	3/8	20/49	4/9	12/25	1/2	12/25	4/9	3/8	8/25	12/49

zu A 15.2:

Man beachte, dass in Formel 15.3 die Variable x für die Krümmung des zu bestimmenden Kreises verwendet wird, bei der Lösung der beiden Probleme steht die Variable x für den Radius des Kreises. Daher wird hier die Variable z für die Krümmung des zu bestimmenden Kreises verwendet.

- Problem 1**

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r und ein Kreis mit Radius 1 – r sowie der äußere Kreis mit Radius 1. Dann gilt für die beiden zu ergänzenden Kreise mit Krümmung z gemäß Formel 15.3:

$$\left[z - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{1-r} - 1 \right) \right]^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{1-r} - 1 \right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(1-r)^2} + 1 \right) \right]$$

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{1-r+r-r \cdot (1-r)}{r \cdot (1-r)} = \frac{1-r+r^2}{r \cdot (1-r)}, \text{ also } \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{1-r} - 1 \right)^2 = \frac{(1-r+r^2)^2}{r^2 \cdot (1-r)^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(1-r)^2} + 1 &= \frac{(1-r)^2 + r^2 + r^2 \cdot (1-r)^2}{r^2 \cdot (1-r)^2} = \frac{1-2r+r^2+r^2+r^2-2r^3+r^4}{r^2 \cdot (1-r)^2} \\ &= \frac{1-2r+3r^2-2r^3+r^4}{r^2 \cdot (1-r)^2} = \frac{(1-r+r^2)^2}{r^2 \cdot (1-r)^2} \end{aligned}$$

d. h. auf der rechten Seite der quadratischen Gleichung steht null. Die quadratische Gleichung hat also nur die Lösung $z = \frac{1-r+r^2}{r \cdot (1-r)}$. Der Radius der zu ergänzenden Kreise ist dann gleich dem Kehrwert dieses

Bruchterms, vgl. Lösung von Problem 1.

- Problem 2**

Gegeben ist ein Kreis mit Radius r und zwei Kreise mit Radius x. Der äußere Kreis wird zunächst nicht beachtet. Dann gilt für die beiden zu ergänzenden Kreise mit Krümmung z gemäß Formel 15.3:

$$\left[z - \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) \right]^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right) \right]$$

Nebenrechnung:

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{r} + \frac{2}{x}\right)^2 = \frac{1}{r^2} + \frac{4}{rx} + \frac{4}{x^2}$$

$$\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{x^2}\right) = \frac{1}{r^2} + \frac{4}{rx} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{2}{x^2} = \frac{4}{rx} + \frac{2}{x^2} = \frac{2 \cdot (2x + r)}{rx^2}$$

Die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung sind

$$z_1 = \frac{1}{r} + \frac{2}{x} + \sqrt{\frac{4 \cdot (2x + r)}{rx^2}} \quad \text{und} \quad z_2 = \frac{1}{r} + \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{4 \cdot (2x + r)}{rx^2}},$$

wobei für die negative Lösung z_2 gilt: $z_2 = -1$, denn der äußere Kreis hat den Radius 1.

$$\text{Es gilt also } -1 = \frac{1}{r} + \frac{2}{x} - \sqrt{\frac{4 \cdot (2x + r)}{rx^2}}, \text{ d. h. } \sqrt{\frac{4 \cdot (2x + r)}{rx^2}} = \frac{1}{r} + \frac{2}{x} + 1 = \frac{x + 2r + rx}{rx}.$$

Quadrieren der beiden Seiten der Gleichung ergibt:

$$\frac{4 \cdot (2x + r)}{rx^2} = \frac{(x + 2r + rx)^2}{r^2 x^2} \Leftrightarrow 4r \cdot (2x + r) = (x + 2r + rx)^2$$

$$\Leftrightarrow 8rx + 4r^2 = x^2 + 4r^2 + r^2 x^2 + 4rx + 2rx^2 + 4r^2 x$$

$$\Leftrightarrow 4rx - 4r^2 x = x^2 + r^2 x^2 + 2rx^2$$

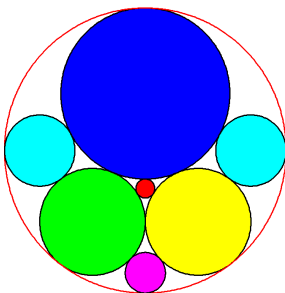
$$\Leftrightarrow 4rx \cdot (1 - r) = x^2 \cdot (1 + 2r + r^2)$$

$$\Leftrightarrow 4r \cdot (1 - r) = x \cdot (1 + r)^2,$$

vgl. Lösung von Problem 2.

zu A 15.3:

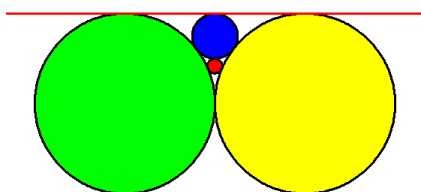
- **Descartes-Tripel (5 ; 8 ; 8)**



Wählt man $r_5 = 360/3 = 120$ LE für den äußeren Radius, dann ist $r_1 = 360/5 = 72$ LE (blau);
 $r_2 = r_3 = 360/8 = 45$ LE (grün, gelb), dann ist $r_4 = 360/45 = 8$ LE (rot).

weitere Radien: $r_6 = 360/21 = 120/7$ LE (pink), $r_7 = 360/12 = 30$ LE (hellblau)

- **Descartes-Tripel (1 ; 1 ; 4), vgl. Abschnitt 15.5**

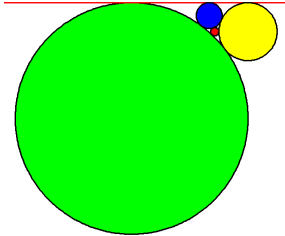


Wählt man $r_1 = 12/1 = 12$ LE (grün), $r_2 = 12/1 = 12$ LE (gelb) und $r_3 = 12/4 = 3$ LE (blau), dann ist $r_4 = 12/12 = 1$ LE (rot) und $r_5 = 12/0 = \infty$ (außen).

weiterer Radius (hier nicht eingezeichnet): $r_6 = 4/3$ LE (berührt den gelben bzw. grünen und den blauen Kreis sowie die Gerade)

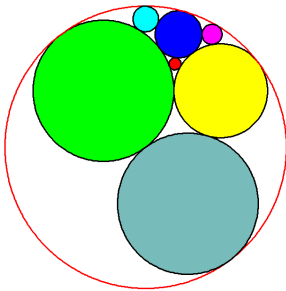
- **Descartes-Tripel (1 ; 4 ; 9), vgl. Abschnitt 15.5**

Wählt man $r_1 = 252/1 = 252$ LE (grün), $r_2 = 252/4 = 63$ LE (gelb) und $r_3 = 252/9 = 28$ (blau), dann ist $r_4 = 252/28 = 9$ (rot) und $r_5 = 252/0 = \infty$ (außen).



weiterer Radius (hier nicht eingezeichnet): $r_6 = 63/4$ LE (berührt den grünen und den blauen Kreis sowie die Gerade)

- **Descartes-Tripel (2 ; 3 ; 6)**

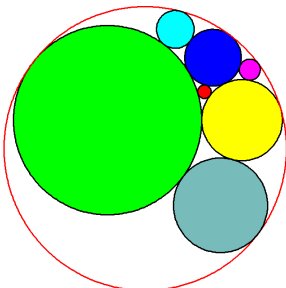


Wählt man $r_5 = 138/1 = 138$ LE für den äußeren Radius, dann ist $r_1 = 138/2 = 69$ LE (grün); $r_2 = 138/3 = 46$ LE (gelb) und $r_3 = 138/6 = 23$ LE (blau), dann ist $r_4 = 138/23 = 6$ LE (rot).

weitere Radien: $r_6 = 138/2 = 69$ LE (blaugrau), $r_7 = 11$ (türkis), $r_8 = 14$ (pink).

Die Grafik stimmt mit der des Descartes-Tripels (2 ; 2 ; 3) überein.

- **Descartes-Tripel (3 ; 7 ; 10)**

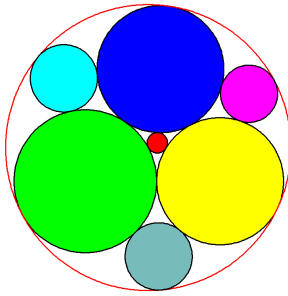


Wählt man $r_5 = 210/2 = 105$ LE für den äußeren Radius, dann ist $r_1 = 210/3 = 70$ LE (grün); $r_2 = 210/7 = 30$ LE (gelb) und $r_3 = 210/10 = 21$ LE (blau), dann ist $r_4 = 210/42 = 5$ LE (rot).

weitere Radien: $r_6 = 210/6 = 35$ LE (blaugrau), $r_7 = 210/15 = 14$ LE (hellblau), $r_8 = 210/27 = 70/9$ LE (pink).

Die Grafik stimmt mit der des Descartes-Tripels (3 ; 6 ; 7) überein.

• **Descartes-Tripel (8 ; 9 ; 9)**



Wählt man $r_5 = 504/4 = 126$ LE für den äußeren Radius, dann ist $r_1 = 504/8 = 63$ LE (grün);
 $r_2 = r_3 = 504/9 = 56$ LE (blau, gelb), dann ist $r_4 = 504/56 = 9$ LE (rot).

weitere Radien: $k_6 = 504/17$ LE (blaugrau/hellblau), $k_7 = 504/20 = 126/5$ LE (pink)

zu A 15.4:

(1) Die Anordnung der Kreise ist punkt- und achsensymmetrisch

$r_1 = r_2 = r_3 = 1$ (grün, gelb, blau)

Lösen der Descartes-Gleichung liefert $x = 3 \pm 2 \cdot \sqrt{3}$, also

$$r_4 = \frac{1}{3 + 2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0,1547 \text{ (rot) und } r_5 = -\frac{1}{3 - 2 \cdot \sqrt{3}} \approx 2,1547 \text{ (außen)}$$

$$\frac{1}{r_6} = 2 \cdot (1 + 1 + (3 - 2 \cdot \sqrt{3})) - 1 \approx 2,072, \text{ also } r_6 \approx 0,483 \text{ (hellblau).}$$

(2) $r_1 = r_2 = 5$ (grün, gelb), $r_3 = 8$ (blau)

Lösen der Descartes-Gleichung liefert

$$x = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} \right) \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{21}{40} \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{100}} = \frac{21}{40} \pm \frac{24}{40}$$

Hieraus ergibt sich $r_4 = \frac{8}{9} \approx 0,889$ (rot) und $r_5 = \frac{40}{3} \approx 13,333$ (außen).

gesucht: zwei Kreise, welche die folgenden drei Kreise berühren	bereits bekannter Kreis	$x_1 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) - x_2$	Radius des neu bestimmten Kreises
grün (5), blau (8), außen (40/3)	gelb (5)	$2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{3}{40} \right) - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$	$\frac{10}{3} \approx 3,3$ (hellblau)
grün (5), gelb (5), außen (40/3)	blau (8)	$2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{3}{40} \right) - \frac{1}{8} = \frac{21}{40}$	$\frac{40}{21} \approx 1,905$ (pink)

(3) $r_1 = 6$ (grün), $r_2 = 5$ (gelb), $r_3 = 3$ (blau)

$$2 \cdot \left(\frac{1}{6^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{x^2} \right) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{x} \right)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(\frac{161}{900} + \frac{1}{x^2} \right) = \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{x} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2} - \frac{7}{5x} - \frac{119}{900} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{180}{17}x = \frac{900}{119} \Leftrightarrow x = -\frac{90}{17} \pm \frac{\sqrt{504000}}{119},$$

also $r_4 \approx 0,672$ und $r_5 \approx 11,260$

gesucht: zwei Kreise, welche die folgenden drei Kreise berühren	bereits bekannter Kreis	$x_1 = 2 \cdot (k_1 + k_2 + k_3) - x_2$	Radius des neu bestimmten Kreises
grün (6), blau (3), außen (11,260)	gelb (5)	$2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{1}{11,260} \right) - \frac{1}{5} \approx 0,622$	1,607 (hellblau)
blau (3), gelb (5), außen (11,260)	grün (6)	$2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11,260} \right) - \frac{1}{6} \approx 0,722$	1,384 (pink)
grün (6), gelb (5), außen (11,260)	blau (3)	$2 \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11,260} \right) - \frac{1}{3} \approx 0,222$	4,497 (blaugrau)

zu A 15.5:

(1) Aus den Krümmungen der sich berührenden Kreise $k_1 = 14$, $k_2 = 15$ und $k_3 = 11$ ergibt sich gemäß Formel 15.5:

$(14 + 15 + 11) \pm 2 \cdot \sqrt{14 \cdot 15 + 14 \cdot 11 + 15 \cdot 11} = 40 \pm 2 \cdot \sqrt{529} = 40 \pm 46$, also $k_4 = -6$ (Krümmung des äußeren Kreises) und $k_5 = 86$.

Hieraus ergeben sich mithilfe von Formel 15.4 die Krümmungen der benachbarten Kreise:

$2 \cdot (14 + 15 - 6) - 11 = 35$ (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1 , k_2 und k_4),

$2 \cdot (14 + 11 - 6) - 15 = 23$ (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1 , k_3 und k_4) usw.

(2) Aus den Krümmungen der sich berührenden Kreise $k_1 = 8$, $k_2 = 8$ und $k_3 = 5$ ergibt sich gemäß Formel 15.5:

$(8 + 8 + 5) \pm 2 \cdot \sqrt{8 \cdot 8 + 8 \cdot 5 + 8 \cdot 5} = 21 \pm 2 \cdot \sqrt{144} = 21 \pm 24$, also $k_4 = -3$ (Krümmung des äußeren Kreises) und $k_5 = 45$.

Hieraus ergeben sich mithilfe von Formel 15.4 die Krümmungen der benachbarten Kreise:

$2 \cdot (8 + 8 - 3) - 5 = 21$ (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1 , k_2 und k_4),

$2 \cdot (8 + 5 - 3) - 8 = 12$ (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1 , k_3 und k_4) usw.

(3) Aus den Krümmungen der sich berührenden Kreise $k_1 = 4$, $k_2 = 12$ und $k_3 = 13$ ergibt sich gemäß Formel 15.5:

$(4 + 12 + 13) \pm 2 \cdot \sqrt{4 \cdot 12 + 4 \cdot 13 + 12 \cdot 13} = 29 \pm 2 \cdot \sqrt{256} = 29 \pm 32$, also $k_4 = -3$ (Krümmung des äußeren Kreises) und $k_5 = 61$.

Hieraus ergeben sich mithilfe von Formel 15.4 die Krümmungen der benachbarten Kreise:

$2 \cdot (12 + 13 - 3) - 4 = 40$ (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_2 , k_3 und k_4),

$2 \cdot (13 + 4 - 3) - 12 = 16$ (berührt die Kreise mit den Krümmungen k_1 , k_3 und k_4) usw.

zu A 15.6:

In Beispiel 2 ist $r = \frac{1}{2}$ und $r_0 = \frac{1}{3}$.

Für die Krümmung der beiden benachbarten Kreise K_1 ergibt sich: $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 7$,

weiter: $\frac{1}{r_2} = \frac{4}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{4}{\frac{1}{2}} = 10$ und $\frac{1}{r_3} = \frac{9}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{9}{\frac{1}{2}} = 15$ sowie $\frac{1}{r_4} = \frac{16}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{16}{\frac{1}{2}} = 22$

Allgemein: $\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\frac{1}{6}} - \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{2}} = (n+1)^2 + 6 = n^2 + 2n + 7$

und somit die Folge der Kreiskrümmungen 6, 7, 10, 15, 22, 31, 42, ...

zu A 15.7:

z. B. Kette 12, 13, 16, 21, ...

Hier ist $r = 1/3$ (äußerer Kreis) und $r_0 = 1/4$

$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{4}} - \frac{1}{\frac{1}{3}} = 13$; $\frac{1}{r_2} = \frac{4}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{4}{\frac{1}{3}} = 16$; $\frac{1}{r_3} = \frac{9}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{9}{\frac{1}{3}} = 21$;

$\frac{1}{r_4} = \frac{16}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{16}{\frac{1}{3}} = 28$

Allgemein: $\frac{1}{r_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\frac{1}{12}} - \frac{(n+1)^2}{\frac{1}{3}} = (n+1)^2 + 12 = n^2 + 2n + 13$

zu A 15.8:

Gemäß Formel 15.4 ergibt sich für die Krümmung k_4 eines Kreises, der die Kreise mit den Krümmungen $k_1 = n^2$, $k_2 = (n+k)^2$, $k_3 = (2n+k)^2$ berührt:

$k_4 = 2 \cdot (n^2 + (n+k)^2 + (2n+k)^2) - 0 = 2 \cdot (n^2 + n^2 + 2nk + k^2 + 4n^2 + 4nk + k^2)$, also

$k_4 = 4 \cdot (3n^2 + 3nk + k^2)$ mit $n, k \in \mathbb{N}$

Für $n = 1$ und $k = 0$ ergibt sich beispielsweise: $k_4 = 4 \cdot (3 + 0 + 0) = 12$, vgl. Abb. 15.7a.

Für $n = 1$ und $k = 1$ ergibt sich beispielsweise: $k_4 = 4 \cdot (3 + 3 + 1) = 28$, vgl. Abb. 15.7b.

zu A 15.9:

Aus der Beziehung $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 2 \cdot (k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)$ ergibt sich

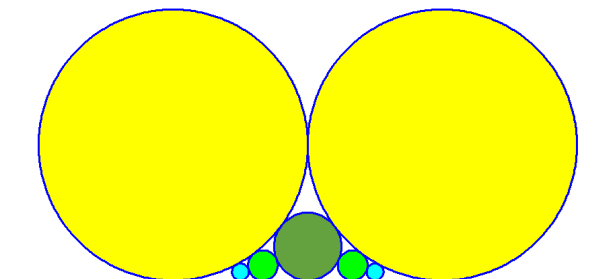
$k_3^2 - 2 \cdot k_3 \cdot (k_1 + k_2) = 2 \cdot k_1 \cdot k_2 - k_1^2 - k_2^2 \Leftrightarrow (k_3 - (k_1 + k_2))^2 = 2 \cdot k_1 \cdot k_2 - k_1^2 - k_2^2 + (k_1 + k_2)^2 \Leftrightarrow$

$(k_3 - (k_1 + k_2))^2 = 4 \cdot k_1 \cdot k_2$, also $k_3 = (k_1 + k_2) \pm 2 \cdot \sqrt{k_1 k_2}$

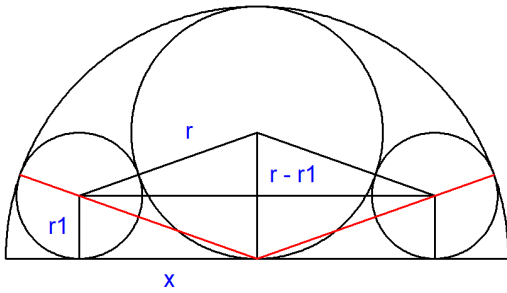
Im Beispiel mit $k_1 = k_2 = 1$ ergeben sich die beiden Lösungen $k_3 = 0$ bzw. $k_3 = 4$.

Im Beispiel mit $k_1 = 1$ (gelb) und $k_2 = 4$ (grün) ergeben sich die beiden Lösungen $k_3 = 1$ bzw. $k_3 = 9$, d. h., außer dem Kreis mit Radius $r_3 = 1/9$ (hellblau) gibt es einen weiteren Kreis mit Radius $r_3 = 1$.

usw.



zu A 15.10:



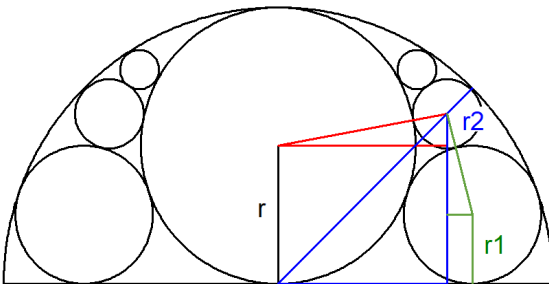
Für das rechtwinklige Dreieck, das bestimmt ist durch die Mittelpunkte des gelb gefärbten und des grün gefärbten Kreises, gilt:

$$x^2 = (r + r_1)^2 - (r - r_1)^2, \text{ hieraus ergibt sich: } x^2 = 4 \cdot r \cdot r_1, \text{ also mit } r = \frac{1}{2}: x^2 = 2 \cdot r_1$$

Für den Abstand x der Berührungspunkte der Kreise mit Radius r und r_1 gilt außerdem:

$$x^2 = (1 - r_1)^2 - r_1^2 = 1 - 2r_1$$

Hieraus folgt: $1 - 2r_1 = 2r_1 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{4}$, also $x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$.



Um dem Mittelpunkt $M_2(x_2|y_2)$ und den Radius r_2 zu bestimmen, betrachte man drei Dreiecke:

$$\text{rot: } (y_2 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2 = (\frac{1}{2} + r_2)^2$$

$$\text{grün: } (y_2 - \frac{1}{4})^2 + (\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - x_2)^2 = (\frac{1}{4} + r_2)^2$$

$$\text{blau: } x_2^2 + y_2^2 = (1 - r_2)^2$$

Umformen dieser drei Gleichungen ergibt

$$x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 = y_2 + r_2$$

$$x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 = \sqrt{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} r_2 - \frac{1}{2}$$

$$x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 = 1 - 2r_2$$

Es gelten also die Gleichungen $y_2 + r_2 = 1 - 2r_2$, also $y_2 = 1 - 3r_2$, sowie

$$y_2 + r_2 = \sqrt{2} \cdot x_2 + \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} r_2 - \frac{1}{2}, \text{ also } \sqrt{2} \cdot x_2 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} r_2 = \frac{1}{2}.$$

Ersetzt man die Variable y_2 , so erhält man hieraus $\sqrt{2} \cdot x_2 + r_2 = 1$, also $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (1 - r_2)$.

Setzt man dies beispielsweise in die dritte Gleichung $x_2^2 + y_2^2 = (1 - r_2)^2$ ein, so ergibt sich:

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - r_2)^2 + (1 - 3r_2)^2 = (1 - r_2)^2, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2} - r_2 + \frac{1}{2} \cdot r_2^2 + 1 - 6r_2 + 9r_2^2 = r_2^2 - 2r_2 + 1 \Leftrightarrow \frac{17}{2} r_2^2 - 5r_2 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

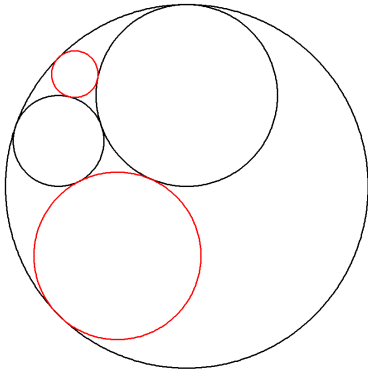
$$r_2^2 - \frac{10}{17}r_2 = -\frac{1}{17} \Leftrightarrow (r_2 - \frac{5}{17})^2 = \frac{25}{289} - \frac{1}{17} (= \frac{8}{289}) \Leftrightarrow r_2 \approx 0,128 \text{ (kleinere der beiden Lösungen)}$$

Hieraus folgt dann: $x_2 \approx 0,617$ und $y_2 \approx 0,617$.

Den Radius kann man auch mithilfe der Descartes'schen Formel (15.3) berechnen – man beachtet dabei die Beschränkung auf einen Halbkreis nicht.

Einsetzen von $k_1 = \frac{1}{0,5} = 2$, $k_2 = \frac{1}{0,25} = 4$ und $k_3 = \frac{1}{-1} = -1$ führt zu $(k_4 - 5)^2 = \pm 2\sqrt{3}$, also $r_4 = \frac{1}{5 \pm 2\sqrt{3}}$.

Die kleinere der beiden Lösungen ist der Radius, der oben berechnet wurde; in der folgenden Abbildung ist auch der andere berührende Kreis eingetragen.



Der Radius des in der Aufgabenstellung rot gefärbten Kreises kann dann mithilfe des Vieta'schen Wurzelsatzes (Formel 15.4) berechnet werden: Bekannt sind die Radien des gelb ausgefüllten Kreises (0,5) bzw. blau ausgefüllten Kreises (0,128) sowie der Radius des äußeren Kreises (1); eine Lösung ist dann bereits bekannt, nämlich der Radius des grün gefüllten Kreises (0,25):

$$2 \cdot \left(\frac{1}{0,5} + \frac{1}{0,128} - \frac{1}{1} \right) - \frac{1}{0,25} \approx 13,657 \approx \frac{1}{0,073}. \text{ Demnach ist also der gesuchte Radius } 0,073 \text{ LE!}$$

zu A 15.11:

Abb. links: Für die Diagonale des Quadrats gilt: $\sqrt{2} = 2r \cdot (1 + \sqrt{2})$ und weiter

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (1 + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,293.$$

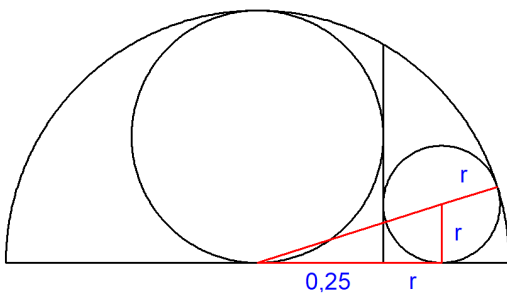


Abb. rechts: Im rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Verbindungsstrecke zwischen dem Mittelpunkt des Halbkreises und dem Mittelpunkt des kleinen Kreises rechts ist, gilt:

$$\left(\frac{1}{4} + r\right)^2 + r^2 = \left(\frac{1}{2} - r\right)^2, \text{ also } r^2 + \frac{3}{2}r = \frac{3}{16} \Leftrightarrow \left(r + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} \approx 0,116.$$

zu A 15.12:

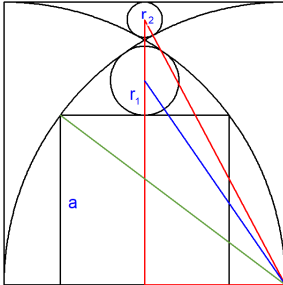
Für den Radius $R = 1$ des Viertelkreisbogens (= Seitenlänge des Quadrats) gilt:

$$1 = r_1 + r_1 \cdot \sqrt{2}, \text{ also } r_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414$$

und weiter für die Diagonale des Quadrats $\sqrt{2} = 1 + (r_2 + r_2 \cdot \sqrt{2})$, also

$$r_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = (\sqrt{2}-1)^2 = 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,172$$

zu A 15.13:



rechtwinkliges Dreieck mit roter Hypotenuse: $(1-r_2)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1+r_2)^2$, also $4r_2 = \frac{1}{4}$ und somit $r_2 = \frac{1}{16}$

rechtwinkliges Dreieck mit grüner Hypotenuse: $(\frac{1}{2} + \frac{a}{2})^2 + a^2 = 1^2$, also $\frac{5}{4}a^2 + \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow a^2 + \frac{2}{5}a = \frac{3}{5} \Leftrightarrow (a + \frac{1}{5})^2 = \frac{16}{25} \Leftrightarrow a = \frac{3}{5}$$

rechtwinkliges Dreieck mit blauer Hypotenuse: $(a+r_1)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1-r_1)^2$, und mit $a = \frac{3}{5}$ ergibt sich:

$$\frac{16}{5}r_2 = \frac{39}{100} \Leftrightarrow r_2 = \frac{39}{320}$$

zu A 15.14:

Zwischen der Diagonale des Quadrats (Länge $\sqrt{2}$ LE) und dem Radius r des rot gefärbten Kreises gilt der Zusammenhang: $2r_1 + 2 \cdot (1-2r_1) = \sqrt{2}$, also $2r_1 = 2 - \sqrt{2}$, d. h. $r_1 = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,293$

Verbindet man beispielsweise den linken oberen Eckpunkt des Quadrats mit dem Mittelpunkt eines kleinen Kreises (hier dann oben rechts), dann ist dies die Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten der Seitenlänge x und $1-x$ und einer Hypotenuse der Länge $1-r_2$. Daher gilt

$$x^2 + (1-x)^2 = (1-r_2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x + 1 = (1-r_2)^2$$

Für die Diagonale des großen Quadrats gilt: $2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$, also

$$r_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2} - (1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}) - x \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2}-1) - x \cdot \sqrt{2} \text{ und demnach}$$

$$1-r_2 = x \cdot \sqrt{2} + (2-\sqrt{2}) \text{ und weiter}$$

$$(1-r_2)^2 = 2x^2 + 2 \cdot (2-\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} \cdot x + (6-4 \cdot \sqrt{2}) = 2x^2 + (4 \cdot \sqrt{2} - 4) \cdot x + (6-4 \cdot \sqrt{2})$$

Setzt man den rechts stehenden Term und den oben erhaltenen gleich, so ergibt sich:

$$2x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + (4 \cdot \sqrt{2} - 4) \cdot x + (6-4 \cdot \sqrt{2}) \Leftrightarrow$$

$$(4 \cdot \sqrt{2} - 2) \cdot x = 4 \cdot \sqrt{2} - 5, \text{ also}$$

$$x = \frac{4 \cdot \sqrt{2} - 5}{4 \cdot \sqrt{2} - 2} = \frac{1}{14} \cdot (11 - 6 \cdot \sqrt{2}) \approx 0,180, \text{ also}$$

$$r_2 = (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{14} \cdot (11 - 6 \cdot \sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = \frac{3}{14} \cdot \sqrt{2} - \frac{1}{7} \approx 0,160$$

zu A 15.15:

rechtwinkliges Dreieck OAM_1 (rot): $(\frac{1}{2})^2 + r_1^2 = (1-r_1)^2$, also $\frac{1}{4} + r_1^2 = 1 - 2r_1 + r_1^2 \Leftrightarrow 2r_1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow r_1 = \frac{3}{8}$

Weitere rechtwinklige Dreiecke (blau):

$$OBM_2: OB^2 + BM_2^2 = OM_2^2 \Leftrightarrow (1-r_2)^2 + BM_2^2 = (1+r_2)^2$$

$$BCM_2: BC^2 + BM_2^2 = CM_2^2 \Leftrightarrow r_2^2 + BM_2^2 = (1-r_2)^2$$

Auflösen der beiden Gleichungen nach BM_2^2 und gleichsetzen:

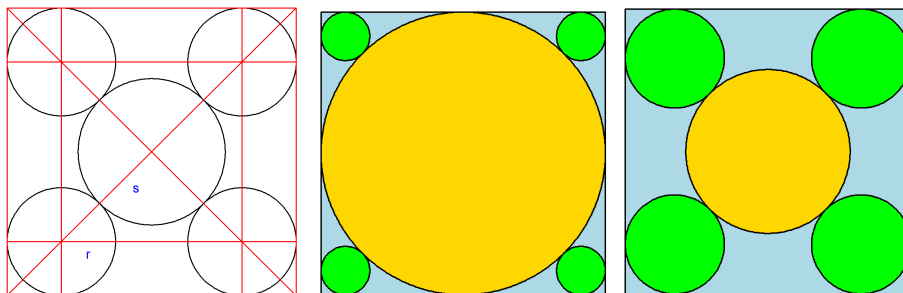
$$BM_2^2 = (1+r_2)^2 - (1-r_2)^2 = (1-r_2)^2 - r_2^2 \text{ und weiter}$$

$$1 + 2r_2 + r_2^2 - 1 + 2r_2 - r_2^2 = 1 - 2r_2 + r_2^2 - r_2^2 \Leftrightarrow 6r_2 = 1 \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{6}$$

rechtwinkliges Dreieck OAM_3 (grün): $(\frac{1}{2})^2 + (1-r_3)^2 = (1+r_3)^2$, also

$$\frac{1}{4} + 1 - 2r_3 + r_3^2 = 1 + 2r_3 + r_3^2 \Leftrightarrow 4r_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow r_3 = \frac{1}{16}$$

zu A 15.16:



Gleichgültig, welche der Lagen der Kreise man betrachtet, gilt: Die 5 Kreise nehmen die Fläche $A = \pi \cdot (s^2 + 4r^2)$ ein.

Die Diagonale des Quadrates hat die Länge $\sqrt{2}$; sie setzt sich zusammen aus je zweimal der Länge des Radius r und des Radius s sowie je zwei halben Diagonalen in den kleineren Quadraten in den Ecken; diese Strecken haben die Länge $r \cdot \sqrt{2}$. Insgesamt gilt also: $2 \cdot r \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot r + 2 \cdot s = \sqrt{2}$.

Aus dieser Bedingung kann man einen Term für s herleiten: $s = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1) \cdot r$ und nach Einsetzen erhält man dann eine quadratische Funktion

$$A(r) = \pi \cdot (s^2 + 4r^2) = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} - (2 + \sqrt{2}) \cdot r + (7 + 2 \cdot \sqrt{2}) \cdot r^2 \right),$$

deren Graph eine nach oben geöffnete Parabel darstellt. Die größten Werte werden am rechten oder linken Rand der Definitionsmenge des Problems angenommen.

Daher bestimmen wir diese Definitionsmenge:

(1) Der Kreis mit Radius s berührt die Quadratseiten, d.h. $s = 0,5$ LE. In diesem Fall gilt

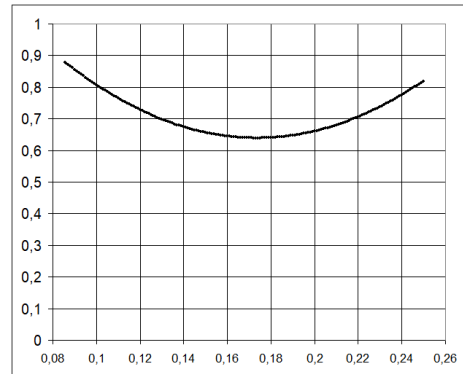
$$2 \cdot (\sqrt{2} + 1) \cdot r + 2 \cdot 0,5 = \sqrt{2}, \text{ also } r = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)}{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2} \approx 0,086$$

(2) Die vier Kreise in den Quadratecken berühren einander, d.h. $r = 0,25$ LE, d.h. die Definitionsmenge bzgl. der Variablen r ist: $0,086 \leq r \leq 0,25$

Die Funktionswerte an diesen Stellen sind: $A(0,086) \approx 0,878$ FE bzw. $A(0,25) \approx 0,819$ FE, d. h., das Maximum wird in dem Fall angenommen, dass der innere Kreis die Quadratseiten berührt.

Bleibt noch zu berechnen,

- welche Fläche bedeckt ist, wenn die fünf Radien gleich groß sind. Dann gilt: $(2 \cdot \sqrt{2} + 4) \cdot r = \sqrt{2}$ und daher $r = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 0,207$ mit $A \approx 0,674$ FE.
- wo das Minimum der Bedeckung liegt. Aus der Grafik kann man ablesen, dass dieses Minimum bei $r \approx 0,174$ liegt. Den exakten Wert findet man, indem man den Scheitelpunkt der quadratischen Parabel bestimmt. Dieser liegt bei $r = \frac{10 + 3 \cdot \sqrt{2}}{82} \approx 0,1737$, vgl. die rechte Grafik oben.



zu A 15.17:

Figur Mitte: Der große Kreis ist der Inkreis des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge 1, d. h., sein Radius ist ein Drittel so groß wie dessen Höhe, also $s = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3}$. Tangenten durch die Berührungspunkte trennen vom großen gleichseitigen Dreieck kleinere gleichseitige Dreiecke ab. Für die Eckkreise gilt, dass sie Inkreise dieser „restlichen“ gleichseitigen Dreiecke sind, also einen Radius r besitzen, der ein Drittel so groß ist wie die Höhe dieser gleichseitigen Teildreiecke, also: $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3} = \frac{1}{18} \cdot \sqrt{3} \approx 0,096$.

Für die bedeckte Fläche gilt daher: $A = \pi \cdot \left(\frac{1}{36} \cdot 3 + 3 \cdot \frac{1}{324} \cdot 3 \right) = \pi \cdot \frac{1}{9}$, das ist 80,6% der Gesamtfläche von $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3}$.

Figur rechts: Hier sind alle Kreise gleich groß; sie sind Inkreise der 4 gleich großen gleichseitigen Dreiecke, die man bei Einzeichnen der Tangenten durch die Berührungspunkte erhält. Hier gilt also: $r = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{3}$, d. h. $A = \frac{1}{12} \cdot \pi$; der bedeckte Anteil beträgt demnach 60,5%.

Figur links: Verbindet man die Mittelpunkte der drei großen Kreise miteinander, so entsteht ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $2r$. Fällt man dann die Lote von diesen Mittelpunkten auf die Dreiecksseiten, dann kann man ablesen: Die Höhe des Ausgangsdreiecks ist so groß wie die Höhe des innen liegenden Dreiecks der Mittelpunkte plus r (unten) und plus $2r$ (oben), also: $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = r + \frac{2r}{2} \cdot \sqrt{3} + 2r$. Nach r aufgelöst ist dies: $r = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$.

Bevor man jetzt etwas mühsam den Radius des innen liegenden Kreises bestimmt, sollte man doch eher die geometrische Situation allgemein betrachten:

Man kann stets die Eckkreise mit Radius r als Inkreise von gleichseitigen Dreiecken auffassen, die durch die Tangenten durch die Berührungspunkte mit dem Mittenkreis entstehen.

Dann gilt für die Höhe h dieser Eck-Dreiecke: $h = 3r$.

Der Abstand des Mittelpunkts des Ausgangsdreiecks von den drei Eckpunkten des Dreiecks (Radius des Umkreises) beträgt

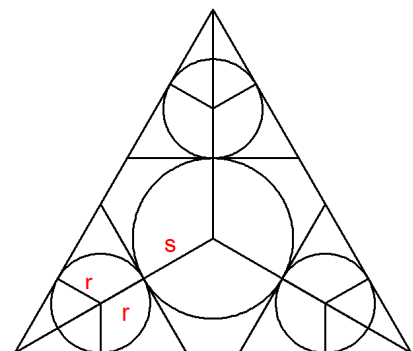
$$h + s = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \right) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3}, \text{ also } s = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} - 3r$$

Demnach gilt für den überdeckten Teil des gleichseitigen Dreiecks:

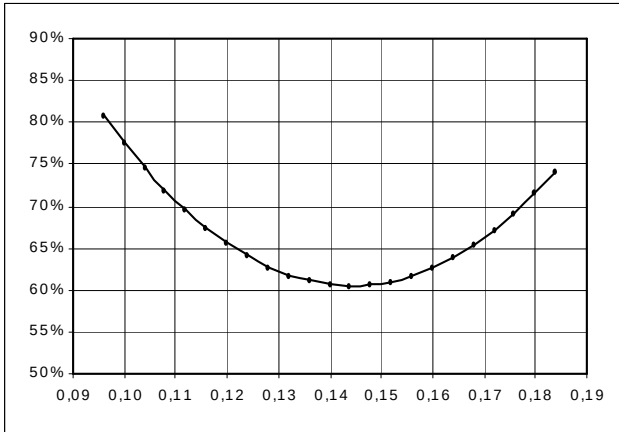
$$A = \pi \cdot (3r^2 + s^2) = \pi \cdot (3r^2 + \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} - 3r \right)^2) = \pi \cdot (3r^2 + \frac{1}{3} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r + 9r^2) = \pi \cdot (12r^2 + \frac{1}{3} - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r).$$

Es sich also um den Funktionsterm einer quadratischen Funktion mit der Variablen r :

$$A = 12\pi \cdot \left(r^2 - \frac{1}{6} \cdot \sqrt{3} \cdot r + \frac{1}{36} \right)$$



Das Minimum der Funktion liegt bei $r = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{3} \approx 0,144$, also für den Fall vor, dass vier gleich große Kreise gezeichnet werden. Das Maximum der Funktion muss an einem der beiden Randwerte der Definitionsmenge liegen. Diese Definitionsmenge ist gegeben durch das Intervall $\frac{1}{18} \cdot \sqrt{3} \approx 0,096 \leq r \leq \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 0,183$. Aus der folgenden Abbildung ist zu erkennen, dass die maximale Bedeckung vorliegt, wenn zunächst der Inkreis des gleichseitigen Dreiecks gezeichnet wird und dann in die Ecken jeweils die kleineren Kreise.



zu A 15.18:

Bezeichnet man die Dreiecksseiten (wie üblich) mit a (kurze Kathete), b (lange Kathete) und c ($= 1$ LE), dann gilt: $a^2 + b^2 = 1$, außerdem gilt für den Flächeninhalt: $(2r)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = 1$. Weiter gilt: $b = a + 2r$, also $(2r)^2 = (b - a)^2 = b^2 - 2ab + a^2$. Diese Gleichungen sind nicht unabhängig voneinander, wie man sieht, wenn man in die Gleichung für den Flächeninhalt einsetzt: $b^2 - 2ab + a^2 + 2ab = 1$.

Weiter hilft hier die Formel für den Radius eines Inkreises im rechtwinkligen Dreieck: $r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$.

Einsetzen in $b = a + 2r$ ergibt: $b = a + (a + b - 1)$, also $2a = 1$, d. h., es handelt sich bei den Dreiecken um halbe gleichseitige Dreiecke. Folglich gilt $b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ und somit

$$r = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 0,183.$$

Hinweis zur Inkreis-Formel: Für den Flächeninhalt A eines rechtwinkligen Dreiecks mit Inkreis-Radius r gilt

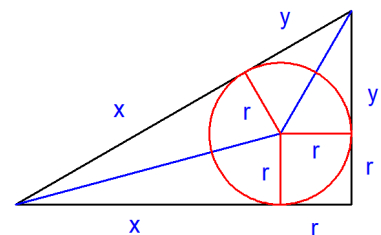
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot r + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y \cdot r + r^2 = x \cdot r + y \cdot r + r^2.$$

Dies ist einerseits gleich

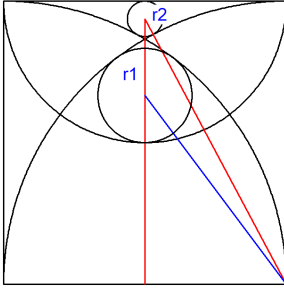
$$A = (x \cdot r + r^2) + (y \cdot r + r^2) - r^2 = (x + r) \cdot r + (y + r) \cdot r - r^2 = a \cdot r + b \cdot r - r^2$$

andererseits gleich $A = (x + y) \cdot r + r^2 = c \cdot r + r^2$, also gilt:

$$a \cdot r + b \cdot r - r^2 = c \cdot r + r^2, \text{ also } a + b - r = c + r \Leftrightarrow a + b - c = 2r, \text{ d. h. } r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$$

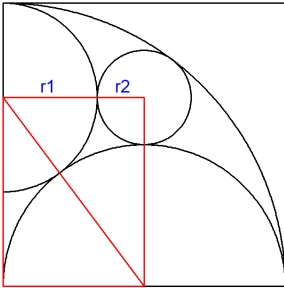


zu A 15.19:



rechtwinkliges Dreieck mit blauer Hypotenuse: $(\frac{1}{2} + r_1)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1 - r_1)^2$, also $3r_1 = \frac{1}{2}$ und somit $r_1 = \frac{1}{6}$.

rechtwinkliges Dreieck mit roter Hypotenuse: $(1 - r_2)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (1 + r_2)^2$, also $4r_2 = \frac{1}{4}$ und somit $r_2 = \frac{1}{16}$.

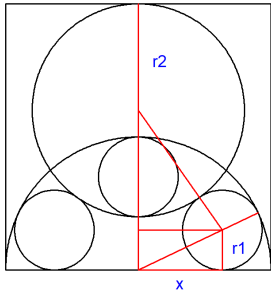


Für die beiden rechtwinkligen Dreiecke gilt:

$$(1 - r_1)^2 + (\frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2} + r_1)^2, \text{ also } 3r_1 = 1 \text{ und somit } r_1 = \frac{1}{3}.$$

$$(r_1 + r_2)^2 + (\frac{1}{2} + r_2)^2 = (\frac{1}{2} + r_1)^2, \text{ also } (\frac{1}{3} + r_2)^2 + (\frac{1}{2} + r_2)^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})^2; \text{ hieraus ergibt sich:}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{3}r_2 + r_2^2 + \frac{1}{4} + r_2 + r_2^2 = \frac{25}{36} \Leftrightarrow 2r_2^2 + \frac{5}{3}r_2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow (r_2 + \frac{5}{12})^2 = \frac{49}{144} \Leftrightarrow r_2 = \frac{1}{6}.$$



Zwischen den beiden Radien r_1 und r_2 besteht folgende Beziehung (Abstand des Kreises mit Radius r_2 von der unteren Quadratseite): $1 - 2r_2 = \frac{1}{2} - 2r_1$, also $r_2 = r_1 + \frac{1}{4}$

Im unten liegenden rechtwinkligen Dreieck gilt: $r_1^2 + x^2 = (\frac{1}{2} - r_1)^2$, also $x^2 = (\frac{1}{2} - r_1)^2 - r_1^2 = \frac{1}{4} - r_1$.

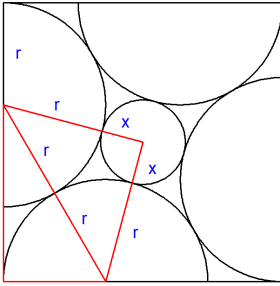
Im darüber liegenden rechtwinkligen Dreieck gilt: $(1 - r_2 - r_1)^2 + x^2 = (r_1 + r_2)^2$. Ersetzt man $r_2 = r_1 + \frac{1}{4}$,

dann ergibt sich hieraus: $(1 - (r_1 + \frac{1}{4}) - r_1)^2 + x^2 = (r_1 + r_1 + \frac{1}{4})^2$, also $(\frac{3}{4} - 2r_1)^2 + x^2 = (2r_1 + \frac{1}{4})^2$ und weiter

$$\frac{9}{16} - 3r_1 + 4r_1^2 + x^2 = 4r_1^2 + r_1 + \frac{1}{16} \Leftrightarrow x^2 = 4r_1 - \frac{1}{2}$$

Aus den beiden Gleichungen mit x^2 ergibt sich: $x^2 = 4r_1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - r_1$, also $5r_1 = \frac{3}{4}$, d. h. $r_1 = \frac{3}{20} = 0,15$ und

hieraus weiter $r_2 = 0,4$ sowie $x^2 = 4 \cdot 0,15 - \frac{1}{2} = 0,1$, also $x = \sqrt{0,1} \approx 0,316$.

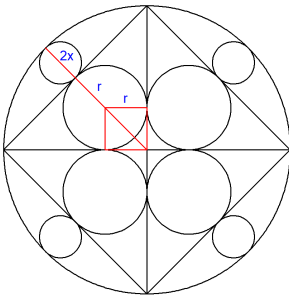


Für das untere der rechtwinkligen Dreiecke gilt: $r^2 + (1-r)^2 = (2r)^2$, also $r^2 + r = \frac{1}{2}$ und weiter $(r + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, d.h. $r = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 0,366$.

Im oberen rechtwinkligen Dreieck gilt:

$(x+r)^2 + (x+r)^2 = (2r)^2$, also $(x+r)^2 = 2r^2$ und somit $x = (\sqrt{2} - 1) \cdot r$ und schließlich

$$x = (\sqrt{2} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 0,152$$

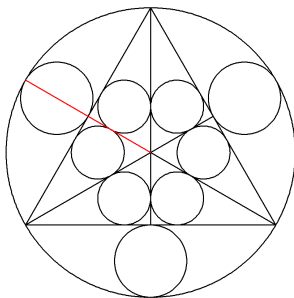


Das einbeschriebene Quadrat hat die Seitenlänge $\sqrt{2}$. Zwischen der halben Seitenlänge des Quadrats und den innen liegenden Kreisen besteht der Zusammenhang: $r + r \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$, also ist

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot (\sqrt{2} + 1)} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \approx 0,293$$

Somit ergibt sich wegen $1 = 2x + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ für den Radius x der außen liegenden Kreise:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \approx 0,146, \text{ d. h., dieser Radius ist halb so groß wie der der innen liegenden Kreise.}$$



Der Durchmesser $2r$ der außerhalb des gleichseitigen Dreiecks liegenden Kreise ist halb so groß wie der Radius des Ausgangskreises, d. h. der Radius r dieser Kreise beträgt $r = \frac{1}{4}$.

Aus dem Radius 1 des Umkreises des gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge s ergibt sich $\frac{2}{3} \cdot \frac{s}{2} \cdot \sqrt{3} = 1$, also $s = \sqrt{3}$. Für den Radius x eines Inkreises eines rechtwinkligen Dreiecks gilt $x = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$, hier ist $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}$ und $c = 1$. Somit gilt: $x = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - 1) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \approx 0,183$.

Hinweis zur Inkreis-Formel: Für den Flächeninhalt A eines rechtwinkligen Dreiecks mit Inkreis-Radius r gilt

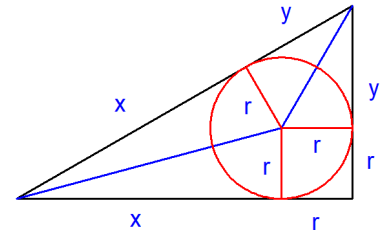
$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot r + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y \cdot r + r^2 = x \cdot r + y \cdot r + r^2 .$$

Dies ist einerseits gleich

$$A = (x \cdot r + r^2) + (y \cdot r + r^2) - r^2 = (x + r) \cdot r + (y + r) \cdot r - r^2 \\ = a \cdot r + b \cdot r - r^2$$

andererseits gleich $A = (x + y) \cdot r + r^2 = c \cdot r + r^2$, also gilt:

$$a \cdot r + b \cdot r - r^2 = c \cdot r + r^2, \text{ also } a + b - r = c + r \Leftrightarrow a + b - c = 2r, \text{ d. h. } r = \frac{1}{2} \cdot (a + b - c)$$



Kap. 16

zu A 16.1:

n	Σk	n^2	Σk^2	$(n+1) \cdot \Sigma k$	$\Sigma(\Sigma k)$	$(n+1) \cdot \Sigma k - \Sigma(\Sigma k)$
1	1	1	1	2	1	1
2	3	4	5	9	4	5
3	6	9	14	24	10	14
4	10	16	30	50	20	30
5	15	25	55	90	35	55
6	21	36	91	147	56	91
7	28	49	140	224	84	140
8	36	64	204	324	120	204

n	n^3	Σk^3	$(n+1) \cdot \Sigma k^3$	$\Sigma(\Sigma k^3)$	$(n+1) \cdot \Sigma k^3 - \Sigma(\Sigma k^3)$	k^4	Σk^4
1	1	1	2	1	1	1	1
2	8	9	27	10	17	16	17
3	27	36	144	46	98	81	98
4	64	100	500	146	354	256	354
5	125	225	1350	371	979	625	979
6	216	441	3087	812	2275	1296	2275
7	343	784	6272	1596	4676	2401	4676
8	512	1296	11664	2892	8772	4096	8772

zu A 16.2:

$$c(n+1) - c(n) = \alpha \cdot (n+1)^2 + \beta \cdot (n+1) + \gamma - \alpha \cdot n^2 - \beta \cdot n - \gamma = 2\alpha \cdot n + (\alpha + \beta)$$

Koeffizientenvergleich mit $b(n) = u \cdot n + v$ ergibt

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot u \quad \text{und hieraus} \quad v = \frac{1}{2} \cdot u + \beta \Leftrightarrow \beta = v - \frac{1}{2} \cdot u$$

zu A 16.3:

• Summe der ersten n vierten Potenzen

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 5. Grades: $s(n) = a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f$

Der Tabelle entnimmt man:

$$s(0) = 0; s(1) = 1; s(2) = 17; s(3) = 98; s(4) = 354; s(5) = 979. \text{ Wegen } s(0) = 0 \text{ folgt unmittelbar: } f = 0.$$

Gelöst werden muss also ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 5 Variablen

$$\left| \begin{array}{l} a+b+c+d+e=1 \\ 32a+16b+8c+4d+2e=17 \\ 243a+81b+27c+9d+3e=98 \\ 1024a+256b+64c+16d+4e=354 \\ 3125a+625b+125c+25d+5e=979 \end{array} \right|.$$

Dieses hat die Lösung $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{30}\right)$.

Es gilt also:

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

- **Summe der ersten n fünften Potenzen**

Ansatz mit einer ganzrationalen Funktion 6. Grades:

$$s(n) = a \cdot n^6 + b \cdot n^5 + c \cdot n^4 + d \cdot n^3 + e \cdot n^2 + f \cdot n + g$$

$$s(0) = 0; s(1) = 1; s(2) = 33; s(3) = 276; s(4) = 1300; s(5) = 4425; s(6) = 12201.$$

Wegen $s(0) = 0$ folgt unmittelbar: $g = 0$.

Gelöst werden muss also ein lineares Gleichungssystem mit 6 Gleichungen und 6 Variablen

$$\left| \begin{array}{l} a+b+c+d+e+f=1 \\ 64a+32b+16c+8d+4e+2f=33 \\ 729a+243b+81c+27d+9e+3f=276 \\ 4096a+1024b+256c+64d+16e+4f=1300 \\ 15625a+3125b+625c+125d+25e+5f=4425 \\ 46656a+7776b+1296c+216d+36e+6f=12201 \end{array} \right|.$$

Dieses hat die Lösung $\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{5}{12}; 0; -\frac{1}{12}; 0\right)$.

Es gilt also:

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2$$

zu A 16.4:

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

$$[a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e] + (n+1)^3 = a \cdot (n+1)^4 + b \cdot (n+1)^3 + c \cdot (n+1)^2 + d \cdot (n+1) + e \Leftrightarrow$$

$$a \cdot n^4 + b \cdot n^3 + c \cdot n^2 + d \cdot n + e + (n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1) =$$

$$a \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + b \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + c \cdot (n^2 + 2n + 1) + d \cdot (n + 1) + e \Leftrightarrow$$

$$n^4 \cdot (a - a) + n^3 \cdot (b + 1 - 4a - b) + n^2 \cdot (c + 3 - 6a - 3b - c) +$$

$$n \cdot (d + 3 - 4a - 3b - 2c - d) + (e + 1 - a - b - c - d - e) = 0 \Leftrightarrow$$

$$n^3 \cdot (1 - 4a) + n^2 \cdot (3 - 6a - 3b) + n \cdot (3 - 4a - 3b - 2c) + (1 - a - b - c - d) = 0$$

und hieraus schrittweise $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, $d = 0$ (und $e = 0$ wegen $s(0) = 0$).

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

$$[a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f] + (n+1)^4$$

$$= a \cdot (n+1)^5 + b \cdot (n+1)^4 + c \cdot (n+1)^3 + d \cdot (n+1)^2 + e \cdot (n+1) + f \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} a \cdot n^5 + b \cdot n^4 + c \cdot n^3 + d \cdot n^2 + e \cdot n + f + (n^4 + 4 \cdot n^3 + 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n + 1) \\ = a \cdot (n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) + b \cdot (n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1) + c \cdot (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) \\ + d \cdot (n^2 + 2n + 1) + e \cdot (n + 1) + f \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^5 \cdot (a - a) + n^4 \cdot (b + 1 - 5a - b) + n^3 \cdot (c + 4 - 10a - 4b - c) + n^2 \cdot (d + 6 - 10a - 6b - 3c - d) \\ + n \cdot (e + 4 - 5a - 4b - 3c - 2d - e) + (f + 1 - a - b - c - d - e - f) = 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^4 \cdot (1 - 5a) + n^3 \cdot (4 - 10a - 4b) + n^2 \cdot (6 - 10a - 6b - 3c) + n \cdot (4 - 5a - 4b - 3c - 2d) + \\ (1 - a - b - c - d - e) = 0 \end{aligned}$$

und hieraus schrittweise $a = \frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}$, $d = 0$, $e = -\frac{1}{30}$ (und $f = 0$ wegen $s(0) = 0$).

zu A 16.5:

$$\begin{aligned} a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d + \binom{2}{0} \cdot n^2 + \binom{2}{1} \cdot n + \binom{2}{2} \cdot 1 \\ = a \cdot \left(\binom{3}{0} \cdot n^3 + \binom{3}{1} \cdot n^2 + \binom{3}{2} \cdot n + \binom{3}{3} \right) + b \cdot \left(\binom{2}{0} \cdot n^2 + \binom{2}{1} \cdot n + \binom{2}{2} \right) + c \cdot \left(\binom{1}{0} \cdot n + \binom{1}{1} \right) + d \end{aligned}$$

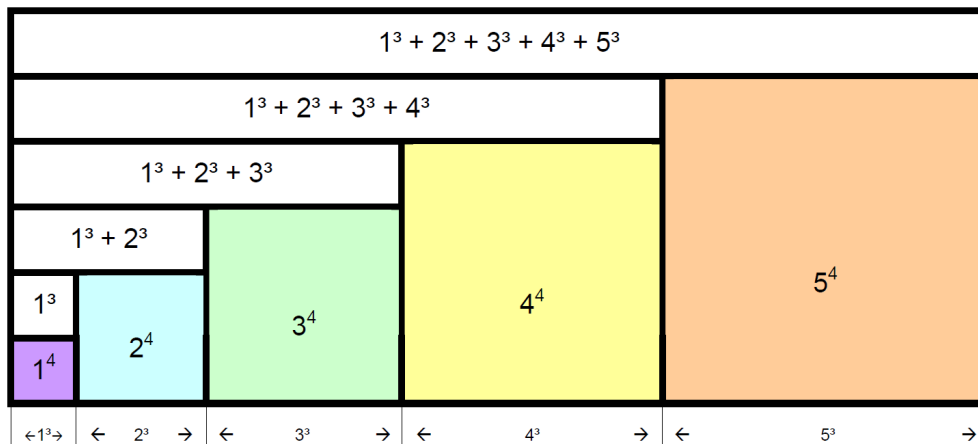
also

$$\left(\binom{2}{0} - \binom{3}{1} \cdot a \right) \cdot n^2 + \left(\binom{2}{1} - \binom{3}{2} \cdot a - \binom{2}{1} \cdot b \right) \cdot n + \left(\binom{2}{2} - \binom{3}{3} \cdot a - \binom{2}{2} \cdot b - \binom{1}{1} \cdot c \right) = 0$$

Hieraus ergeben sich dann die Gleichungen:

$$\left(\binom{2}{0} - \binom{3}{1} \cdot a \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\binom{2}{1} - \binom{3}{2} \cdot a - \binom{2}{1} \cdot b \right) = 0 \quad \text{und} \quad \left(\binom{2}{2} - \binom{3}{3} \cdot a - \binom{2}{2} \cdot b - \binom{1}{1} \cdot c \right) = 0$$

zu A 16.6:



$$\begin{aligned} [1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4] + [1^3 + (1^3 + 2^3) + (1^3 + 2^3 + 3^3) + \dots + (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)] \\ = (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4] + \left[\left(\frac{1}{4} \cdot 1^4 + \frac{1}{2} \cdot 1^3 + \frac{1}{4} \cdot 1^2 \right) + \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 + \frac{1}{2} \cdot 2^3 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 \right) + \dots + \left(\frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2 \right) \right] \\ = (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) \end{aligned}$$

$$\left[1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4\right] + \left[\frac{1}{4} \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + \frac{1}{2} \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + \frac{1}{4} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)\right]$$

$$= (n+1) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)$$

$$\frac{5}{4} \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - \frac{1}{4} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{4}{5} \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

und weiter

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \left(\frac{4}{5}n + \frac{2}{5}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2\right) - \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right)$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{2}{5}n^4 + \frac{1}{5}n^3 + \frac{1}{10}n^4 + \frac{1}{5}n^3 + \frac{1}{10}n^2 - \frac{1}{15}n^3 - \frac{1}{10}n^2 - \frac{1}{30}n$$

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

zu A 16.7:

Im ersten Fall kann man die Gleichung wie folgt umformen: $\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{1 + 2 + 3 + \dots + n} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3} = \frac{2n+1}{3}$;

Dies ist möglich, weil auf der rechten Seite der Gleichung ein Produkt steht.

Eine solche Umformung ist bei der Herleitung der Summe der Kubikzahlen nicht möglich, weil auf der rechten Seite der Gleichung zwei Summenterme stehen und keine einfache Quotientenbildung möglich ist.

zu A 16.8:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 3 \cdot \binom{n}{2} + 2 \cdot \binom{n}{3}$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{n}{1} + 3 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} + 2 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \dots$$

$$= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

			0
		1	1
2	3	4	5
2	5	9	14
2	7	16	30
2	9	25	55
	11	36	91

zu A 16.9:

[illegible]

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 15 \cdot \binom{n}{2} + 50 \cdot \binom{n}{3} + 60 \cdot \binom{n}{4} + 24 \cdot \binom{n}{5}$$

$$= 0 + 1 \cdot \frac{n}{1} + 15 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} + 50 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} + 60 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} + 24 \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

zu A 16.10:

- **Summe der ersten n Kubikzahlen**

Wegen $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = n^3 + 3n^2 + 2n$ ergibt sich aus der zweiten Gleichung:

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4},$$

also

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4} - 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 2 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\ &= \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \left[\frac{(n+2) \cdot (n+3)}{2} - (2n+1) - 2 \right] = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

- **Summe der ersten n vierten Potenzen**

Wegen $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) \cdot (n + 3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$ ergibt sich aus der Gleichung

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5}$$

$$\begin{aligned} & (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) + 6 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 11 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5} \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 & (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) \\
 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5} - 6 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) - 11 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 6 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\
 &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{5} - 6 \cdot \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4} - 11 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} - 6 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} \\
 &= \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot [6 \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4) - 45 \cdot n \cdot (n+1) - 55 \cdot (2n+1) - 90] \\
 &= \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot [6n^3 + 54n^2 + 156n + 144 - 45n^2 - 45n - 110n - 55 - 90] \\
 &= \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot [6n^3 + 9n^2 + n - 1] = \frac{n \cdot (n+1)}{30} \cdot (2n+1) \cdot (3n^2 + 3n - 1)
 \end{aligned}$$

zu A 16.11:

- Summe der ersten n Kubikzahlen**

Wegen $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ ergibt sich aus der analog angelegten Tabelle

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n \cdot 1$$

also

$$\begin{aligned}
 4 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) &= (n+1)^4 - 1^4 - 6 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 4 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) - n \cdot 1 \\
 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - 1 - 2n^3 - 3n^2 - n - 2n^2 - 2n - n \\
 &= n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2 \cdot (n^2 + 2n + 1) = n^2 \cdot (n+1)^2
 \end{aligned}$$

also

$$(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \frac{1}{4} \cdot n^2 \cdot (n+1)^2$$

- Summe der ersten n vierten Potenzen**

Wegen $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ ergibt sich aus der analog angelegten Tabelle

$$(n+1)^5 - 1^5 = 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) + 10 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 10 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + 5 \cdot (1 + 2 + \dots + n) + n \cdot 1$$

also

$$\begin{aligned}
 5 \cdot (1^4 + 2^4 + \dots + n^4) &= (n+1)^5 - 1^5 - 10 \cdot (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) - 10 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) - 5 \cdot (1 + 2 + \dots + n) - n \cdot 1 \\
 &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - 1 - 2,5n^4 - 5n^3 - 2,5n^2 - 10/3 \cdot n^3 - 5n^2 - 5/3 \cdot n - 2,5n^2 - 2,5n - n \\
 &= n^5 + 5/2 \cdot n^4 + 5/3 \cdot n^3 - 1/6 \cdot n
 \end{aligned}$$

also

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

zu A 16.12:

$$\begin{aligned}
 S_4(n) &= 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5} \cdot \left[\binom{5}{0} \cdot B_0 \cdot n^5 + \binom{5}{1} \cdot B_1 \cdot n^4 + \binom{5}{2} \cdot B_2 \cdot n^3 + \binom{5}{3} \cdot B_3 \cdot n^2 + \binom{5}{4} \cdot B_4 \cdot n^1 \right] \\
 &= \frac{1}{4} \cdot [B_0 \cdot n^5 + 5 \cdot B_1 \cdot n^4 + 10 \cdot B_2 \cdot n^3 + 10 \cdot B_3 \cdot n^2 + 5 \cdot B_4 \cdot n^1] = \frac{1}{5} \cdot \left[n^5 + \frac{5}{2}n^4 + \frac{5}{3}n^3 - \frac{1}{6}n^1 \right]
 \end{aligned}$$

wobei $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$ und $B_4 = -\frac{1}{30}$.

$$\begin{aligned}
 S_5(n) &= 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \left[\binom{6}{0} \cdot B_0 \cdot n^6 + \binom{6}{1} \cdot B_1 \cdot n^5 + \binom{6}{2} \cdot B_2 \cdot n^4 + \binom{6}{3} \cdot B_3 \cdot n^3 + \binom{6}{4} \cdot B_4 \cdot n^2 + \binom{6}{5} \cdot B_5 \cdot n^1 \right] \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \left[B_0 \cdot n^6 + 6 \cdot B_1 \cdot n^5 + 15 \cdot B_2 \cdot n^4 + 20 \cdot B_3 \cdot n^3 + 15 \cdot B_4 \cdot n^2 + 6 \cdot B_5 \cdot n^1 \right] \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \left[n^6 + 3n^5 + \frac{5}{2}n^4 - \frac{1}{2}n^2 \right]
 \end{aligned}$$

wobei $B_0 = 1$, $B_1 = \frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_3 = 0$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_5 = 0$

zu A 16.13:

- Summe der ersten n Quadratzahlen**

Ansatz: Der Graph der ganzrationalen Funktion 3. Grades soll durch die Punkte $P_0(0|0)$, $P_1(1|1)$, $P_2(2|5)$ und $P_3(3|14)$ verlaufen.

$$\begin{aligned}
 L_3(n) &= \frac{(n-x_1)(n-x_2)(n-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 + \frac{(n-x_0)(n-x_2)(n-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 \\
 &\quad + \frac{(n-x_0)(n-x_1)(n-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 + \frac{(n-x_0)(n-x_1)(n-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3 \\
 &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \cdot 0 + \frac{(n-0)(n-2)(n-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \cdot 1 \\
 &\quad + \frac{(n-0)(n-1)(n-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \cdot 5 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \cdot 14 \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \cdot (n^3 - 5n^2 + 6n) - \frac{5}{2} \cdot (n^3 - 4n^2 + 3n) + \frac{14}{6} \cdot (n^3 - 3n^2 + 2n) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot n^3 + \frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{6} \cdot n
 \end{aligned}$$

- Summe der ersten n Kubikzahlen**

Ansatz: Der Graph der ganzrationalen Funktion 4. Grades soll durch die Punkte $P_0(0|0)$, $P_1(1|1)$, $P_2(2|9)$, $P_3(3|36)$ und $P_4(4|100)$ verlaufen.

$$\begin{aligned}
 L_4(n) &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \cdot 0 + \frac{(n-0)(n-2)(n-3)(n-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \cdot 1 \\
 &\quad + \frac{(n-0)(n-1)(n-3)(n-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} \cdot 9 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \cdot 36 + \frac{(n-0)(n-1)(n-2)(n-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \cdot 100 \\
 &= 0 - \frac{1}{6} \cdot (n^4 - 9n^3 + 26n^2 - 24n) + \frac{9}{4} \cdot (n^4 - 8n^3 + 19n^2 - 12n) \\
 &\quad - \frac{36}{6} \cdot (n^4 - 7n^3 + 14n^2 - 8n) + \frac{100}{24} \cdot (n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n) \\
 &= \frac{1}{4} \cdot n^4 + \frac{1}{2} \cdot n^3 + \frac{1}{4} \cdot n^2
 \end{aligned}$$

Kap. 17

zu A 17.1:

Abbildung 1 und 3: Anwendung des Satzes von Pythagoras auf das rechtwinklige Teildreieck, dessen Hypotenuse die Kathete des großen Dreiecks ist und dessen Katheten im großen Dreieck Höhe auf der Hypotenuse sowie zugehöriger Hypotenusenabschnitt sind: $a^2 = h^2 + p^2$ und $b^2 = h^2 + q^2$

Abbildung 2 und 4: Da nach dem Kathetensatz das Quadrat über der Kathete flächengleich ist zum Rechteck aus zugehörigem Hypotenusenabschnitt und Hypotenuse ($a^2 = c \cdot p$ und $b^2 = c \cdot q$), folgt, dass das Quadrat über der Höhe jeweils flächengleich ist zu den beiden violett gefärbten Rest-Rechtecken: $h^2 = p \cdot (c - p)$ und $h^2 = q \cdot (c - q)$ (da $c = p + q$ ist dies nichts anderes als die Aussage des Höhensatzes).

Abbildung 5: Die Gesamtfläche der beiden Kathetenquadrate lässt sich also darstellen als Summe der Flächen der beiden Quadrate über den Hypotenusenabschnitten und zwei zueinander kongruenten Restrechtecken, die flächengleich zum Quadrat über der Höhe sind: $a^2 + b^2 = p^2 + q^2 + 2h^2$

Dies lässt sich natürlich auch durch (algebraische) Umformung herleiten:

$$a^2 + b^2 = c^2 = (p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2 = p^2 + 2h^2 + q^2$$

zu A 17.2:

(1) Die Punkte und Seiten der zu untersuchenden Figur werden – wie rechts ablesbar – bezeichnet.

Die Figur ist festgelegt durch das rechtwinklige Dreieck ABC, d. h., durch den rechten Winkel bei C und die Seitenlängen a und b.

Hieraus lassen sich berechnen:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}(a/b) \text{ und } \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\text{Es gilt: } \sin(\alpha) = \frac{a}{c} \text{ und } \cos(\alpha) = \frac{b}{c}$$

Das **Dreieck ABC** hat den Flächeninhalt

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

Dreieck CGH:

Das Dreieck ist kongruent zum Dreieck ABC.

Dreieck AID: Vom Dreieck sind die Seiten b und c gegeben sowie der Winkel

$$\delta = \angle(DAI) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \alpha) = 180^\circ - \alpha.$$

Hieraus ergibt sich wegen $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$ und $a = c \cdot \sin(\alpha)$ der Flächeninhalt

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\delta) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a = A_1$$

Dreieck BEF:

Vom Dreieck sind die Seiten a und c gegeben sowie der Winkel

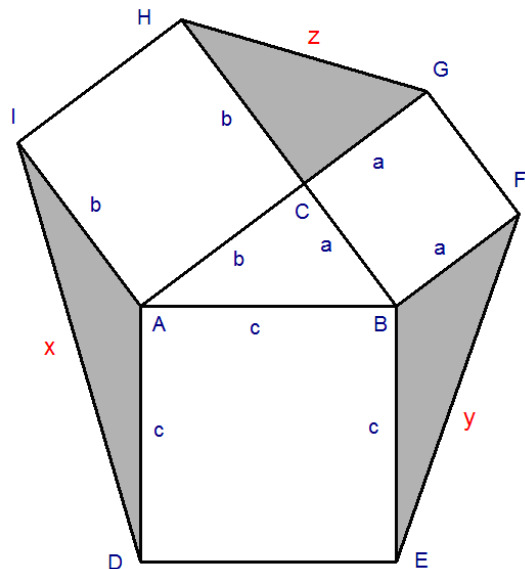
$$\epsilon = \angle(FBE) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \beta) = 180^\circ - \beta = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha.$$

Hieraus ergibt sich wegen $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos(\alpha)$ und $b = c \cdot \cos(\alpha)$ der Flächeninhalt

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\epsilon) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b = A_1$$

(2) Die Länge der Seite x kann mithilfe des Kosinussatzes bestimmt werden:

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\delta) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha) = b^2 + (a^2 + b^2) + 2b^2, \text{ also } \boxed{x^2 = a^2 + 4b^2}$$



$$\text{wegen } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos(\alpha) \text{ und } b = c \cdot \cos(\alpha)$$

Die Länge der Seite y kann mithilfe des Kosinussatzes bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\epsilon) = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(90^\circ + \alpha) \\ &= a^2 + c^2 + 2ac \cdot \sin(\alpha) = a^2 + (a^2 + b^2) + 2a^2, \text{ also } \boxed{y^2 = 4a^2 + b^2} \end{aligned}$$

$$\text{wegen } \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin(\alpha) \text{ und } a = c \cdot \sin(\alpha)$$

Wegen $z = c$ und $c^2 = a^2 + b^2$ ergibt sich:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 4b^2 + 4a^2 + b^2 + a^2 + b^2 = 6 \cdot (a^2 + b^2) = 3 \cdot (a^2 + b^2) + 3 \cdot (a^2 + b^2) = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

(3) Dies ist genau die Aussage, die in (2) bewiesen wurde.

(4) Gegenüber (1) ändert sich die Berechnung der Flächeninhalte der Dreiecke ABC und CGH.

$$\text{Für das Dreieck ABC gilt allgemein: } A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(\beta)$$

$$\text{Im Dreieck CGH gilt für den Winkel am Punkt C: } \varphi = \angle(GCH) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \gamma) = 180^\circ - \gamma.$$

$$\text{Für den Flächeninhalt ergibt sich dann: } A_4 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = A_1$$

$$\text{Im Dreieck AID gilt: } A_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\delta) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(\alpha) = A_1$$

$$\text{Im Dreieck BEF gilt: } A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin(\epsilon) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \cos(\alpha) = A_1$$

Gegenüber (2) ändert sich in der Berechnung von x^2 , y^2 und z^2 :

$$x^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\delta) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos(\alpha)$$

$$y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\epsilon) = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(180^\circ - \beta) = a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos(\beta)$$

$$z^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\varphi) = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(180^\circ - \gamma) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

$$\text{Dann gilt wegen } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha), \text{ also } 2bc \cdot \cos(\alpha) = b^2 + c^2 - a^2, \text{ und analog}$$

$$2ca \cdot \cos(\beta) = c^2 + a^2 - b^2, 2ab \cdot \cos(\gamma) = a^2 + b^2 - c^2:$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

zu A 17.3:

$$\text{Wie in der Lösung von A 17.2 ausgeführt, gilt für das untere gelbe Dreieck: } A_u = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma)$$

$$\text{und das obere gelbe Dreieck mit Winkel } \varphi = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + \gamma) = 180^\circ - \gamma:$$

$$A_o = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\varphi) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(\gamma) = A_u$$

Mit den Bezeichnungen von A 17.2 gilt weiter:

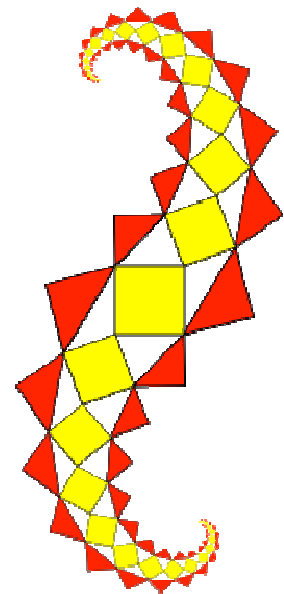
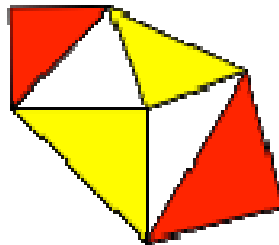
$$c^2 + z^2 = c^2 + a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\gamma) = c^2 + a^2 + b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$$

Tipp: Betrachtet man statt der grünen Quadrate jeweils halb so große gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke und statt der hellblauen Quadrate jeweils ein Viertel davon, also ebenfalls gleichschenkelig-rechtwinklige Dreiecke, dann ergibt sich in der folgenden Figur von Hans Walser

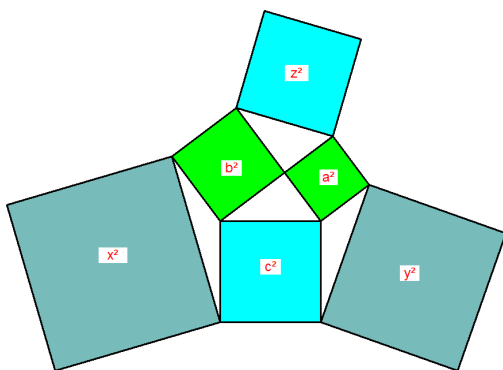
rot = gelb

vgl.

www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/D/Drachenspirale/Drachenspirale.htm



Die Figuren aus in Abb. 17.2b bzw. in Abb. 17.2c kann man auf verschiedene Weise ergänzen, beispielsweise so:



Oben wurde gezeigt: $c^2 + z^2 = 2 \cdot (a^2 + b^2)$

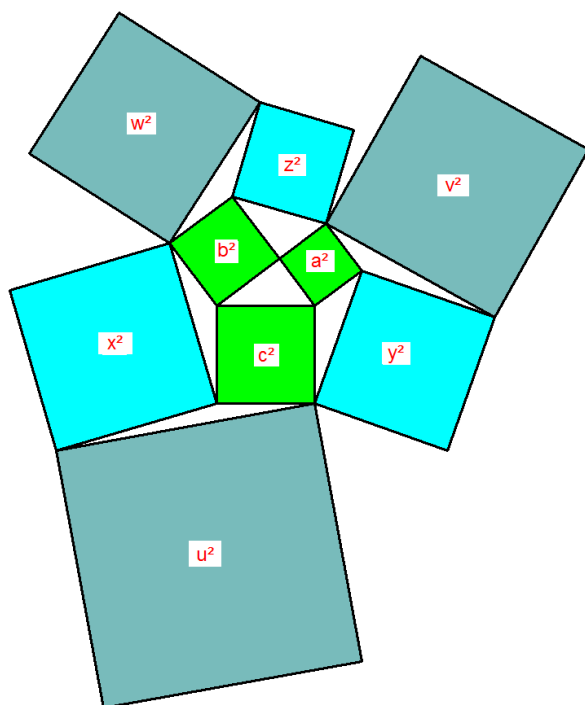
Entsprechend gilt in der Figur links auch:

$$x^2 + a^2 = 2 \cdot (b^2 + c^2) \text{ und}$$

$$y^2 + b^2 = 2 \cdot (a^2 + c^2)$$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2 \cdot (b^2 + c^2 + a^2 + c^2) - a^2 - b^2 \\ &= b^2 + a^2 + 4c^2 = a^2 + b^2 + 4 \cdot (a^2 + b^2) \\ &= 5 \cdot (a^2 + b^2) \end{aligned}$$



Oben wurde gezeigt:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$$

Hier gilt nun

$$u^2 + b^2 = 2 \cdot (x^2 + c^2) \text{ und}$$

$$w^2 + a^2 = 2 \cdot (b^2 + z^2) \text{ und}$$

$$v^2 + c^2 = 2 \cdot (a^2 + y^2),$$

also

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 + a^2 + b^2 + c^2 \\ &= 2 \cdot (x^2 + c^2) + 2 \cdot (z^2 + b^2) + 2 \cdot (y^2 + a^2), \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 + w^2 \\ &= 2 \cdot x^2 + c^2 + 2 \cdot z^2 + b^2 + 2 \cdot y^2 + a^2 \\ &= 2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2) + (a^2 + b^2 + c^2) \\ &= 7 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

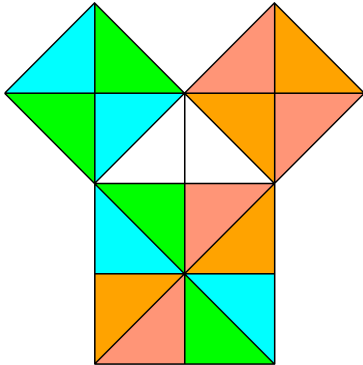
Beachten Sie hierzu auch die folgenden Darstellungen:

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrate_ansetzen/Quadrate_ansetzen.htm

http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/Q/Quadrate_ansetzen2/Quadrate_ansetzen2.htm

<http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/P/Pythagoras-Schmetterling/Pythagoras-Schmetterling.htm>

zu A 17.4:



zu A 17.5:

Man zeichnet das kleinere Kathetenquadrat mit dem Flächeninhalt a^2 unten links in das größere Kathetenquadrat mit dem Flächeninhalt b^2 ein. Die Restfläche mit Flächeninhalt $b^2 - a^2$ wird aufgeteilt in das hellblau gefärbte Eckenquadrat mit Flächeninhalt $(b - a)^2$ und die beiden zueinander kongruenten Rechtecke mit dem jeweiligen Flächeninhalt $(b - a) \cdot a$.

Durch die untere rote Linie werden Teilflächen abgetrennt:

- ein grün gefärbtes Trapez der Breite $b - a$ und den beiden zueinander parallelen Seiten mit den Längen a und a^2/b
- ein kleines grün gefärbtes Dreieck mit den Katheten der Länge $b - a$ und $a - a^2/b$
- ein gelb gefärbte Dreieck mit den Katheten a und $a - a^2/b$
- ein gelb gefärbtes Trapez mit parallelen Seiten der Länge a und a^2/b und der Höhe a

Diese vier gefärbten Puzzlestücke sowie das hellblau gefärbte Eckenquadrat werden in das Hypotenusenquadrat gelegt. Zum Auslegen verwendet wurde also bisher das kleinere gelb gefärbte Kathetenquadrat sowie der rechte grün und hellblau gefärbte Rechteck-Streifen des größeren Kathetenquadrats. Der linke Teil des Kathetenquadrats (in der dritten Abbildung weiß und gelb gefärbt) wird durch die obere rote Linie in zwei zueinander kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, die ungefärbt den Rest des Hypotenusenquadrats ausfüllen.

zu A 17.6:

Die Flächeninhalte der Dreiecke berechnen sich nach der Formel $A_n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{n}$

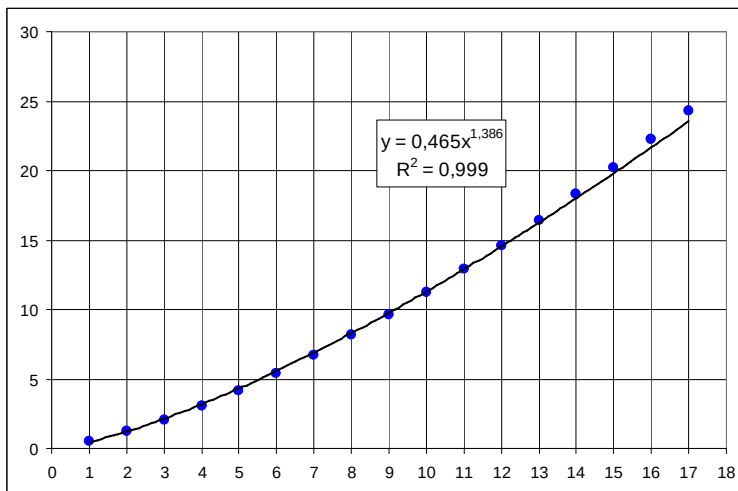
Mit dem 16. Dreieck ergibt sich noch keinen Vollkreis, beim 17. ist der Gesamtwinkel von 360° überschritten.

Diese Winkel ergeben sich für $n = 1, 2, \dots$ aus der Beziehung $\tan(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

n	Fläche	Fläche kumuliert	Winkel	Winkel kumuliert
1	0,500	0,500	45,000	45,000
2	0,707	1,207	35,264	80,264
3	0,866	2,073	30,000	110,264
4	1,000	3,073	26,565	136,829
5	1,118	4,191	24,095	160,924
6	1,225	5,416	22,208	183,132

7	1,323	6,739	20,705	203,837
8	1,414	8,153	19,471	223,308
9	1,500	9,653	18,435	241,743
10	1,581	11,234	17,548	259,291
11	1,658	12,892	16,779	276,070
12	1,732	14,625	16,102	292,172
13	1,803	16,427	15,501	307,673
14	1,871	18,298	14,963	322,637
15	1,936	20,235	14,478	337,114
16	2,000	22,235	14,036	351,150
17	2,062	24,296	13,633	364,783
18	2,121	26,417	13,263	378,046

Der Gesamt-Flächeninhalt der Pythagoras-Spirale kann (für $n < 18$) näherungsweise durch die Potenzfunktion f mit $f(x) = 0,465 \cdot x^{1,386}$ modelliert werden (vgl. EXCEL-Blatt mit Bestimmtheitsmaß 99,9 %).



zu A 17.7:

1. Möglichkeit:

Betrachtet man das rechtwinklige Ausgangsdreieck links mit den Seiten a_0 , b_0 , c_0 , dann gilt nach dem Satz des Pythagoras $a_0^2 + b_0^2 = c_0^2$.

Bezeichnet man die nach rechts kleiner werdenden rechtwinkligen Dreiecke im gleicher Weise, also mit a_1 , b_1 , c_1 , a_2 , b_2 , c_2 usw., dann besteht zwischen diesen Seiten der folgende Zusammenhang: $b_{n+1} = a_n$.

Hiermit folgt dann: $a_{n+1} : b_{n+1} = a_n : b_n$, also:

$$a_{n+1} = b_{n+1} \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} \cdot a_n \text{ und analog: } c_{n+1} = \frac{a_n}{b_n} \cdot c_n$$

$$\text{also: } a_1 = \frac{a_0^2}{b_0} ; a_2 = a_1^2 \cdot \frac{1}{b_1} = \left(\frac{a_0^2}{b_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{a_0} = \frac{a_0^3}{b_0^2} ; a_3 = a_2^2 \cdot \frac{1}{b_2} = \left(\frac{a_0^3}{b_0^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{a_1} = \frac{a_0^6}{b_0^4} \cdot \frac{b_0}{a_0^2} = \frac{a_0^4}{b_0^3} ;$$

$$a_4 = a_3^2 \cdot \frac{1}{b_3} = \left(\frac{a_0^4}{b_0^3} \right)^2 \cdot \frac{1}{a_2} = \frac{a_0^8}{b_0^6} \cdot \frac{b_0^2}{a_0^3} = \frac{a_0^5}{b_0^4} \text{ usw., d. h. ausgehend von Startwert } a_0 \text{ erhält man die folgenden}$$

Glieder der Folge durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $q = \frac{a_0}{b_0}$. Dies ergibt sich auch durch

Ähnlichkeitsbetrachtungen.

$$\text{Weiter gilt: } c_1 = \frac{a_0}{b_1} \cdot c_0 ; c_2 = \frac{a_1}{b_1} \cdot c_1 = \frac{a_0^2}{b_0} \cdot \frac{1}{a_0} \cdot \frac{a_0}{b_0} \cdot c_0 = \frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot c_0 ;$$

$$c_3 = \frac{a_2}{b_2} \cdot c_2 = \frac{a_0^3}{b_0^2} \cdot \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot c_0 = \frac{a_0^3}{b_0^2} \cdot \frac{b_0}{a_0^2} \cdot \frac{a_0^2}{b_0^2} \cdot c_0 = \frac{a_0^3}{b_0^3} \cdot c_0 \text{ usw., d. h. ausgehend von Startwert } c_0 \text{ erhält}$$

man die folgenden Glieder der Folge durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $q = \frac{a_0}{b_0}$.

Schließlich gilt auch für die andere Kathete: $b_1 = a_0$; $b_2 = a_1 = \frac{a_0^2}{b_0}$; $b_3 = a_2 = \frac{a_0^3}{b_0^2}$ usw., d. h. auch die Seitenlängen bilden eine Folge, deren weitere Glieder durch Multiplikation mit dem konstanten Faktor $q = \frac{a_0}{b_0}$ entstehen.

Für die Flächeninhalte der Dreiecke gilt dann:

$$\begin{aligned} A_D &= \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot b_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot b_2 + \frac{1}{2} \cdot a_3 \cdot b_3 + \dots \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[a_0 \cdot b_0 + \left(\frac{a_0}{b_0} \right) \cdot a_0 \cdot a_0 + \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^2 \cdot a_0 \cdot \left(\frac{a_0}{b_0} \right) \cdot a_0 + \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^3 \cdot a_0 \cdot \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^2 \cdot a_0 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[a_0 \cdot b_0 + \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^1 \cdot a_0^2 + \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^3 \cdot a_0^2 + \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^5 \cdot a_0^2 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 + \frac{1}{2} \cdot a_0^2 \cdot [q^1 + q^3 + q^5 + \dots] = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 + \frac{1}{2} \cdot a_0^2 \cdot q \cdot [1 + q^2 + q^4 + \dots] \\ &= \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 + \frac{1}{2} \cdot a_0^2 \cdot q \cdot \frac{1}{1 - q^2} = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 + \frac{1}{2} \cdot a_0^2 \cdot \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 + \frac{1}{2} \cdot a_0^2 \cdot \frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_0^3 \cdot b_0}{b_0^2 - a_0^2} = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot \left[1 + \frac{a_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot b_0 \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \end{aligned}$$

Für die Flächeninhalte der innen liegenden Quadrate gilt:

$$\begin{aligned} A_{Qi} &= b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + \dots = b_0^2 + a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots \\ &= b_0^2 + a_0^2 + (q \cdot a_0)^2 + (q^2 \cdot a_0)^2 + (q^3 \cdot a_0)^2 + \dots = b_0^2 + a_0^2 + q^2 \cdot a_0^2 + q^4 \cdot a_0^2 + q^6 \cdot a_0^2 + \dots \\ &= b_0^2 + a_0^2 \cdot \frac{1}{1 - q^2} = b_0^2 + a_0^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^2} = b_0^2 + a_0^2 \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} = b_0^2 \cdot \left[1 + \frac{a_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \right] \\ &= b_0^2 \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} = \frac{b_0^4}{b_0^2 - a_0^2} \end{aligned}$$

Für die Flächeninhalte der außen liegenden Quadrate gilt:

$$\begin{aligned} A_{Qa} &= c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + \dots = c_0^2 + (q \cdot c_0)^2 + (q^2 \cdot c_0)^2 + (q^3 \cdot c_0)^2 + (q^4 \cdot c_0)^2 + \dots \\ &= c_0^2 \cdot \frac{1}{1 - q^2} = c_0^2 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{a_0}{b_0} \right)^2} = c_0^2 \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} = (a_0^2 + b_0^2) \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Gesamtfläche:

$$\begin{aligned}
 A &= 2 \cdot A_D + 2 \cdot A_{Qa} + A_{Qi} = a_0 \cdot b_0 \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} + 2 \cdot \frac{b_0^4}{b_0^2 - a_0^2} + (a_0^2 + b_0^2) \cdot \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \\
 &= \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \cdot [a_0 \cdot b_0 + 2 \cdot b_0^2 + a_0^2 + b_0^2] = \frac{b_0^2}{b_0^2 - a_0^2} \cdot [a_0^2 + a_0 \cdot b_0 + 3 \cdot b_0^2]
 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit

Man verwendet den Zusammenhang aus A 17.3. Hier wurde gezeigt, dass je zwei violett gefärbte Quadrate doppelt so groß sind wie je zwei hellblau gefärbte Quadrate.

zu A 17.8:

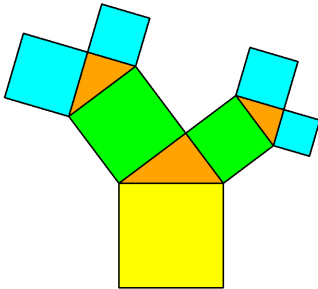
Die gesamte Figur ist festgelegt durch die Längen der Katheten der Ausgangsfigur, also durch a und b :

Im ersten Schritt besteht die Gesamtfigur aus dem Hypotenusenquadrat mit Flächeninhalt $c^2 = a^2 + b^2$, dem rechtwinkligen Dreieck mit Flächeninhalt $\frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ und den beiden Kathetenquadraten, also

$$A_1 = 2 \cdot (a^2 + b^2) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

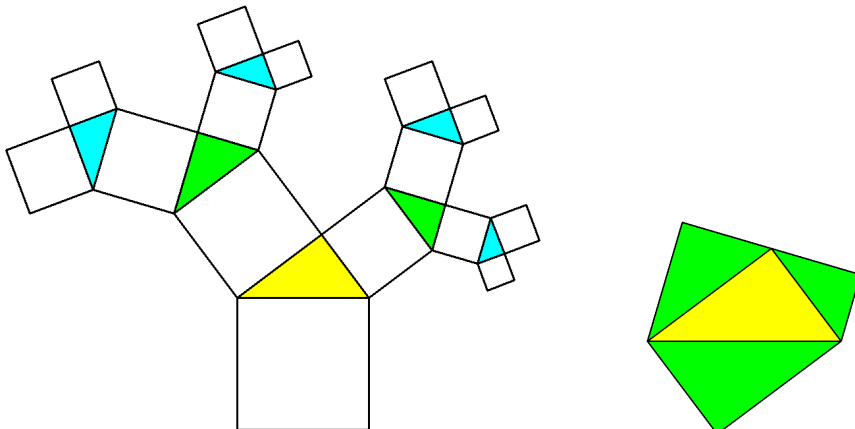
Im nächsten Schritt werden links und rechts jeweils ein rechtwinkliges Dreieck sowie zwei neue Kathetenquadrate angefügt, deren Flächen nach dem Satz von Pythagoras jeweils genauso groß sind wie die Hypotenusenquadrate.

Aus der folgenden Grafik wird deutlich, dass die vier hellblau gefärbten Quadrate des 2. Schritts genauso groß sind wie die beiden grün gefärbten Quadrate des 1. Schritts, die wiederum zusammen so groß sind wie das Hypotenusenquadrats des 1. Schritts.

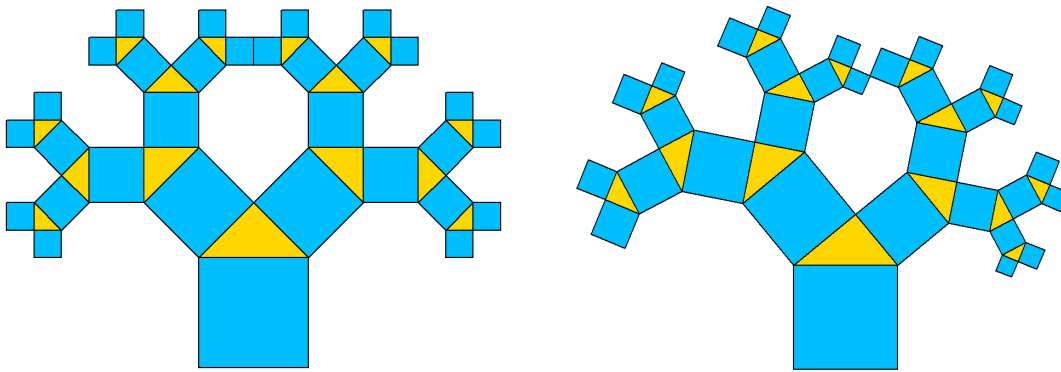


Da also im 1. Schritt die Quadrate bereits einen Flächeninhalt von $2 \cdot (a^2 + b^2)$ haben und mit jedem weiteren Schritt eine Fläche von $a^2 + b^2$ hinzukommt, beträgt die Gesamtfläche der Quadrate nach n Schritten $(n + 1) \cdot (a^2 + b^2)$.

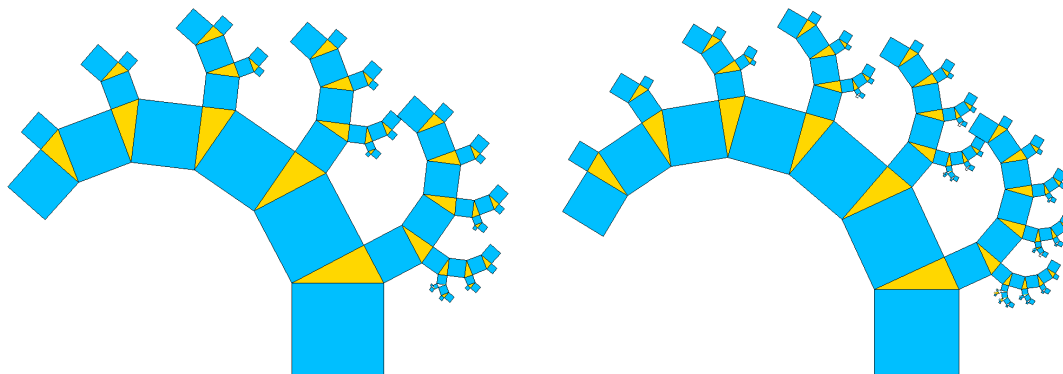
Lässt man in einem Pythagorasbaum alle Quadrate weg, dann entsteht ein Baum aus rechtwinkligen Dreiecken. Dabei sind die beiden Dreiecke des 2. Schritts zusammen genauso groß wie das Dreieck des 1. Schritts, vgl. die Abb. rechts und die Ausführungen im Abschnitt 17.7, sodass die Gesamtfläche der Dreiecke nach n Schritten $n \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ beträgt.



Die Gesamtfläche der Figur wächst also mit n über alle Grenzen hinaus – wenn man nicht beachtet, dass sich die Äste bereits nach wenigen Schritten überschneiden.



Für $\alpha = b$, also $\alpha = 45^\circ$, berühren sich Quadrate beim 3. Schritt der Figur. Für $\alpha \approx 39,4^\circ$, also $a \approx 0,821 \cdot b$, berühren sich Quadrate beim 3. Schritt der Figur in den Ecken zweier Quadrate. Für kleinere Winkel α gibt es noch keine Überschneidungen beim 3. Schritt.



Für $\alpha \approx 27,7^\circ$, also $a \approx 0,525 \cdot b$, berühren sich beim 4. Schritt zwei Äste; bei größeren Winkeln treten Überschneidungen auf. Für $\alpha \approx 24,8^\circ$, also $a \approx 0,462 \cdot b$, berühren sich beim 5. Schritt zwei Äste; bei größeren Winkeln treten Überschneidungen auf.

Es gibt also noch viel zu untersuchen!

Obwohl die Gesamtfläche der Dreiecke und Quadrate über alle Grenzen hinauswächst, ist die tatsächlich belegte Fläche begrenzt, vgl. den deutschen Wikipedia-Beitrag

<https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoras-Baum>.

zu A 17.9:

Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Grundseite s berechnet sich nach der Formel

$$A = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2,$$

denn für das Dreieck gilt $A = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h$ und die Höhe h berechnet sich nach dem Satz des Pythagoras aus der Beziehung $h^2 + (\frac{1}{2} \cdot s)^2 = s^2$, also $h^2 = \frac{3}{4} \cdot s^2$.

Dies ergibt sich auch aus der folgenden allgemeinen Betrachtung:

Der Flächeninhalt A_n eines regelmäßigen n -Ecks berechnet sich als das n -Fache des Flächeninhalts der n gleichschenkligen Dreiecke mit Grundseite s und Schenkel r , wobei gilt (vgl. Kap. 1):

$$h = \frac{s}{2 \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}, \text{ also } A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = n \cdot \frac{s^2}{4 \cdot \tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}.$$

Für $n = 3$ ist $\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \sqrt{3}$, also $A_3 = 3 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{s^2}{4} \cdot \sqrt{3}$.

Für $n = 5$ ist $\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$, also

$$A_5 = 5 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}} \cdot s^2 = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{25 - 20}} \cdot s^2$$

$$= \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \cdot s^2 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \cdot s^2 = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cdot s^2$$

Für $n = 6$ ist $\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, also $A_6 = 6 \cdot \frac{3 \cdot s^2}{4 \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot s^2$.

Für $n = 8$ ist $\tan\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \sqrt{2} - 1$, also

$$A_8 = 8 \cdot \frac{s^2}{4 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = 2 \cdot \frac{s^2}{\sqrt{2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} + 1} = 2 \cdot (\sqrt{2} + 1) \cdot s^2.$$

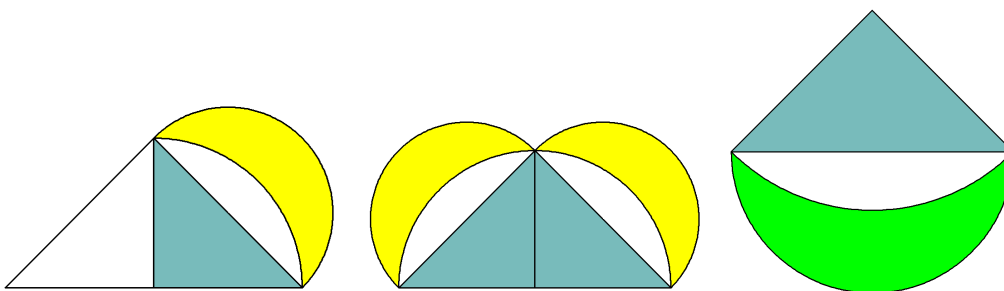
Für die Halbkreise gilt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot s\right)^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{8} \cdot s^2.$$

zu A 17.10:

Bei der Abbildung links handelt es sich um den Spezialfall eines gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecks, das verdoppelt wurde. Die vier Mönchen über den Seiten eines Quadrats sind flächengleich zum Quadrat.

Bei der Abbildung rechts wird die Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras für zueinander ähnliche Figuren über den Seiten angewandt. Hier handelt es sich um Mönchen über der Hypotenuse von gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken. Man kann es auch so formulieren: Die beiden gelb gefärbten Mönchen sind jeweils flächengleich zu halben Dreieck. Das ganze Dreieck ist flächengleich zum grün gefärbten Mönchen.



zu A 17.11:

Das regelmäßige Sechseck besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, deren Seiten gleich dem Radius r des Umkreises des regelmäßigen Sechsecks sind. Die 6 Halbkreise über den Seiten des Sechsecks

nehmen eine Fläche von $A_{HK} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{4} \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \pi$ ein, das Sechseck eine Fläche von

$$A_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2, \text{ zusammen ergibt das eine Fläche von } A_{\text{ges}} = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot (\pi + 2\sqrt{3})$$

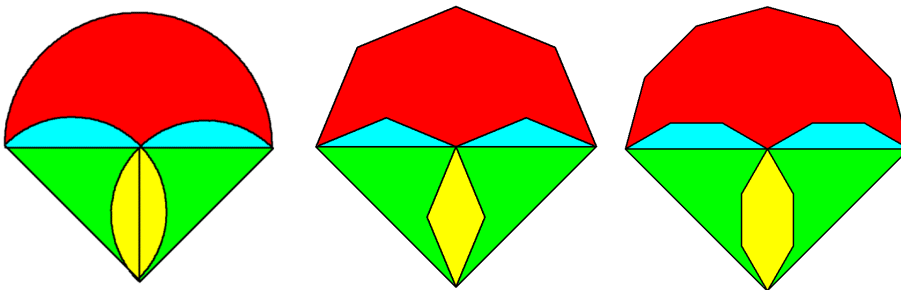
Subtrahiert man hiervon die Fläche des Kreises mit Radius r , dann ergibt sich für die grün gefärbten Mönchchen:

$$A_M = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot (\pi + 2\sqrt{3}) - \pi \cdot r^2 = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \left(\pi + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) = \frac{3}{4} \cdot r^2 \cdot \left(2\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \right)$$

Das stimmt überein mit dem Flächeninhalt der gelb gefärbten Fläche:

$$A_6 = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot r^2 - \left(\frac{r}{2} \right)^2 \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \right) \cdot r^2$$

zu A 17.12:



Betrachtet wird ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck. Bei diesem ist die Höhe genauso groß wie die halbe Hypotenuse und folglich sind die hellblau gefärbten Flächenstücke jeweils genauso groß wie die gelb gefärbten.

Im Unterschied zu dem Hippokrates-Mönchchen sind die Katheten-Halbkreise nach oben geklappt. Die blauen Flächenstücke gehören dann sowohl zur Fläche des Hypotenusen-Halbkreises als auch zu den hochgeklappten Katheten-Halbkreisen und könnten daher zunächst einmal weggelassen werden. Da aber die beiden gelben Flächenstücke zu beiden Katheten-Halbkreisen gehören, braucht man Ausgleichsflächen – und das sind genau die blauen Flächen, die ja genauso groß sind wie die gelben.

Somit ergibt sich: rote Fläche = hellblaue + gelbe + grüne Flächen

Statt der Halbkreise kann man auch halbe regelmäßige 8-Ecke betrachten, auf die sich die Überlegungen entsprechend übertragen lassen. Und da die Anzahl der Mönchchen über den Katheten der halben gleichschenkelig-rechtwinkligen Dreiecken geradzahlig ist, ergibt sich für das zugrundeliegende regelmäßige Vieleck, dass die Anzahl der Ecken durch 4 teilbar sein muss.

zu A 17.13:

Abbildung links: Nicht eingezeichnet ist die Höhe zur Hypotenuse und die beiden Halbkreise. Für die Flächen dieser beiden nicht gezeichneten Halbkreise gilt:

links: $A_h = \text{hellblau} - \text{violett}$

rechts: $A_h = \text{grün} - \text{olivgrün}$

also: **hellblau + olivgrün = grün + violett.**

Abbildung rechts: Die beiden orange gefärbten Halbkreise über dem Hypotenusenabschnitt p und der nach unten abgetragenen Höhe h sind zusammen genauso groß wie der gelb gefärbte Halbkreis, also

gelb = orange.

Da der gesamte Halbkreis unter der Hypotenuse (also olivgrün + orange) so groß ist wie die beiden Halbkreise über den Katheten (gelb + grün), folgt:

grün = olivgrün.

zu A 17.14:

Die Fläche des hellblauen Halbkreis über der Hypotenuse ist genauso groß wie die der beiden dunkelblauen Halbkreise über den Katheten. Diese blauen Halbkreise wiederum sind genauso groß wie die grünen und roten Halbkreise im (durch die Höhe) unterteilten rechtwinkligen Dreieck, d. h.

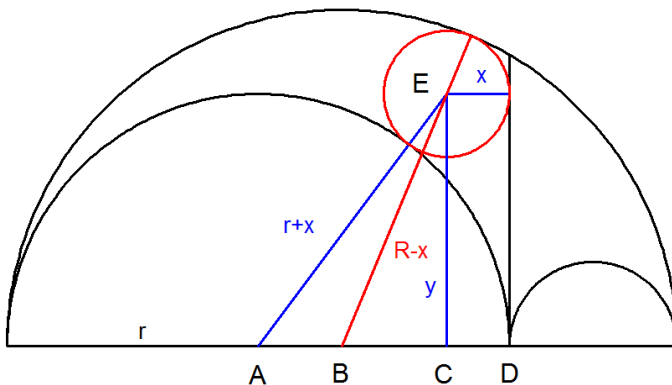
grün + rot = hellblau, also hellblau – grün = gelb.

Schneidet man die grünen Halbkreise aus dem hellblauen Halbkreis heraus, dann hat man das gelb gefärbte Schustermesser, also

gelb = rot.

zu A 17.15:

Der Beweis kann beispielsweise mithilfe des Satzes von Pythagoras geführt werden.



Bezeichnet man den Radius des Halbkreises mit R und den Radius des größeren Halbkreises unterhalb mit r , den Radius des Zwillingskreises mit x sowie den Abstand des Mittelpunktes des Zwillingskreises vom Durchmesser mit $y = CE$, dann kann man folgende Beziehungen für y^2 aufstellen:

$\triangle ADE$: $|AC|^2 + y^2 = |AE|^2$, wobei $|AC| = |AD| - x = r - x$ und $|AE| = r + x$,

also: $y^2 = (r + x)^2 - (r - x)^2 = 4 \cdot rx$

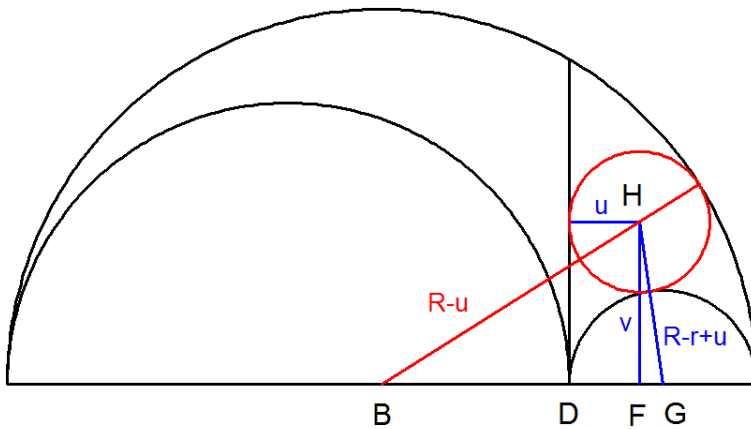
$\triangle BCE$: $|BC|^2 + y^2 = |BE|^2$, wobei $|BC| = |BD| - x = 2r - R - x$ und $|BE| = R - x$,

also: $y^2 = (R - x)^2 - (2r - R - x)^2 = 4 \cdot (Rr + rx - Rx - r^2)$.

Hieraus folgt: $rx = Rr + rx - Rx - r^2 \Leftrightarrow Rx = Rr - r^2$ und daher

$$x = \frac{r \cdot (R - r)}{R}$$

Im rechts liegenden Teil gilt:


$$\Delta BFH: |BF|^2 + v^2 = |BH|^2, \text{ wobei } |BF| = 2r - R + u \text{ und } |BH| = R - u,$$

$$\text{also: } v^2 = (R - u)^2 - (2r - R + u)^2 = 4 \cdot (rR + ru - r^2)$$

$$\Delta FGH: |FG|^2 + v^2 = |GH|^2, \text{ wobei } |FG| = R - r - u \text{ und } |GH| = R - r + u,$$

also: $v^2 = (R - r + u)^2 - (R - r - u)^2 = 4 \cdot (R - r) \cdot u$

Hieraus folgt: $Ru - ru = Rr + ru - r^2 \Leftrightarrow Ru = Rr - r^2$ und daher

$$u = \frac{r \cdot (R - r)}{R}. \text{ Daher gilt } x = u.$$

Bei der auf der italienischen Briefmarke erkennbaren Grafik wird der Beweis mithilfe von Ähnlichkeitsüberlegungen geführt, vgl. u. a. Dietmar Herrmann: Die antike Mathematik, Springer Spektrum, 2014.

zu A 17.16:

Die grün gefärbte Fläche setzt sich zusammen aus der Fläche eines Halbkreises mit Radius r , aus der zwei Halbkreise mit Radius $r/3$ herausgenommen sind und ein Halbkreis mit Radius $r/3$ ergänzt wurde.

Der Flächeninhalt ist also $\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(r^2 - 2 \cdot \left(\frac{r}{3} \right)^2 + \left(\frac{r}{3} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{8}{9} \cdot r^2 = \pi \cdot \frac{4}{9} \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{2}{3} r \right)^2$

Der hellblau gefärbte Kreis hat den Durchmesser $r + r/3$, also den Radius $\frac{2}{3}r$. Der Flächeninhalt dieses

Kreises ist also genauso groß wie der der grün gefärbten Fläche in der Abbildung links. Färbt man in der Abbildung rechts die nicht gefärbte Fläche grün, dann stimmt die insgesamt grün gefärbte Fläche mit der in der ersten Abbildung überein, färbt man sie hellblau, dann stimmt die insgesamt hellblau gefärbte Fläche mit der in der zweiten Abbildung überein.

zu A 17.17:

Betrachtet wird ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck, das durch eine Höhe in zwei zueinander kongruente Teildreiecke zerlegt wird, die selbst wiederum gleichschenkelig-rechtwinklig sind. Dieser Vorgang kann beliebig oft wiederholt werden. Der Streckenzug beginnt am oberen Endpunkt der Höhe und führt dsnn zum Halbierungspunkt der gegenüberliegenden Hypotenuse, der wiederum oberer Endpunkt einer Höhe ist usw. Im nächsten Schritt wird jeweils das links von der Höhe liegende Dreieck gewählt.

Wie in A 17.10 untersucht wurde, hat das jeweilige M\"ondchen \u00fcber der Hypotenuse den gleichen Fl\"acheninhalt wie das Dreieck.

Das Ausgangsdreieck hat den Flächeninhalt $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (2h) \cdot h = h^2 = (1 \text{ LE})^2$. Wegen der fortgesetzten Halbierung haben die nächsten Dreiecke der Folge jeweils einen halb so großen Flächeninhalt.

Wie in Kap. 8 erläutert wurde, hat die unendliche Summe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$ den Wert 2.

Hinweis: Der Streckenzug hat die Länge

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{16}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 2 + \sqrt{2}.$$

zu A 17.18:

(1) Das Viereck ist eigentlich ein Dreieck, das durch die Höhe h_c auf c in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird. Hier gilt: $h_c^2 = a^2 - p^2 = b^2 - q^2$, also $a^2 + q^2 = b^2 + p^2$.

(2) Wenn $x = y$, ist das Viereck achsensymmetrisch bzgl. einer Diagonalen ist, z. B. beim symmetrischen Drachen, dann gilt: $a = d$ und $b = c$. Dann ist die Bedingung $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ erst recht erfüllt.

zu A 17.19:

Die nächsten Summen von zwei Quadratzahlen, für die es mehr als eine Darstellung gibt:

$$125 = 5^2 + 10^2 = 2^2 + 11^2$$

$$130 = 3^2 + 11^2 = 7^2 + 9^2$$

$$145 = 1^2 + 12^2 = 8^2 + 9^2$$

$$170 = 1^2 + 13^2 = 7^2 + 11^2$$

$$185 = 4^2 + 13^2 = 8^2 + 11^2$$

$$200 = 2^2 + 14^2 = 10^2 + 10^2$$

$$205 = 6^2 + 13^2 = 3^2 + 14^2$$

$$221 = 5^2 + 14^2 = 10^2 + 11^2$$

$$250 = 5^2 + 15^2 = 9^2 + 13^2$$

$$260 = 2^2 + 16^2 = 8^2 + 14^2$$

Dass hier überwiegend Zahlen mit Endziffer 0 bzw. 5 vorkommen, lässt sich wie folgt nachvollziehen:

Als Endziffern von Quadratzahlen kommen nur in Frage:

$$0^2 \equiv 0, 1^2 \equiv 1, 2^2 \equiv 4, 3^2 \equiv 9, 4^2 \equiv 6, 5^2 \equiv 5 \pmod{10}$$

Bildet man die Summe von Quadratzahlen mit diesen Endziffern, dann ergeben sich die folgenden Kombinationen:

	0	1	4	5	6	9
0	0	1	4	5	6	9
1	1	2	5	6	7	0
4	4	5	8	9	0	3
5	5	6	9	0	1	4
6	6	7	0	1	2	5
9	9	0	3	4	5	8

zu A 17.20:

(1) In Beispiel 1 wurden die Tripel (5 ; 12 ; 13) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) betrachtet, in Beispiel 2 die Tripel (5 ; 12 ; 13) und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5), in Beispiel 3 das 5-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (5 ; 12 ; 13), in Beispiel 4 das 5-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (5 ; 12 ; 13).

(2) Betrachtet man das 8-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (8 ; 15 ; 17), dann ergeben sich die Zahlentripel (24; 32; 40) und (24; 45; 51).

Betrachtet man das 5-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (8 ; 15 ; 17) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (15; 20; 25) und (8; 15; 17). Betrachtet man das 2-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (8 ; 15 ; 17) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (6; 8; 10) und (8; 15; 17). Betrachtet man das 15-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5)

und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (8 ; 15 ; 17), dann ergeben sich die Zahlentripel (45; **60**; 75) und (32; **60**; 68).

(3) Betrachtet man das 7-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 3-Fache des primitiven Zahlentripels (7 ; 24 ; 25), dann ergeben sich die Zahlentripel (**21**; 28; 35) und (**24**; 72; 75).

Betrachtet man das 8-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (7 ; 24 ; 25) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (**24**; 32; 40) und (7; **24**; 25). Betrachtet man das 7-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das 4-Fache des primitiven Zahlentripels (7 ; 24 ; 25), dann ergeben sich die Zahlentripel (21; **28**; 35) und (**28**; 96; 100). Betrachtet man das 6-Fache des primitiven Zahlentripels (3 ; 4 ; 5) und das primitive Zahlentripel (7 ; 24 ; 25) selbst, dann ergeben sich die Zahlentripel (18; **24**; 30) und (7; **24**; 25).

Mathematik ist schön

Anregungen zum Anschauen und Erforschen für
Menschen zwischen 9 und 99 Jahren

Strick, H.K.

2019, XIII, 380 S. 554 Abb., 489 Abb. in Farbe.,

Softcover

ISBN: 978-3-662-59059-1